Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
Fakultät für Elektrotechnik
Grundlagen der Elektrotechnik
Univ.-Prof. Dr.-Ing. S. Dickmann

Musterlösungen zu Grundlagen der Elektrotechnik

Dr.-Ing. Stefan Schenke

18. Januar 2018

Dies ist eine Zusammenstellung alter Klausuraufgaben. Die Musterlösungen können unvollständig und fehlerhaft sein! Sollten Sie einen Fehler finden, schreiben Sie bitte eine kurze Mail an stefan.schenke@hsu-hh.de
Vielen Dank für die Mitarbeit!

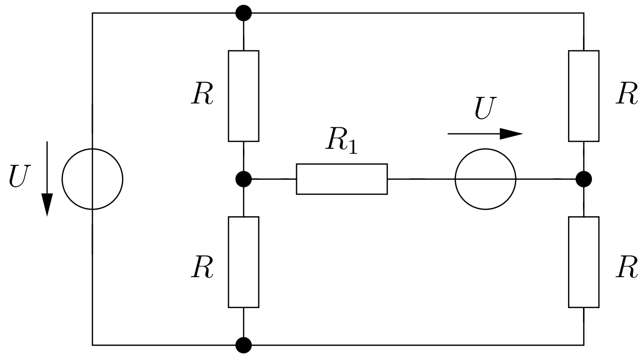
Inhaltsverzeichnis

1 Musterlösungen GET A

1.1 Gleichstrom-Schaltungen

Aufgabe 1

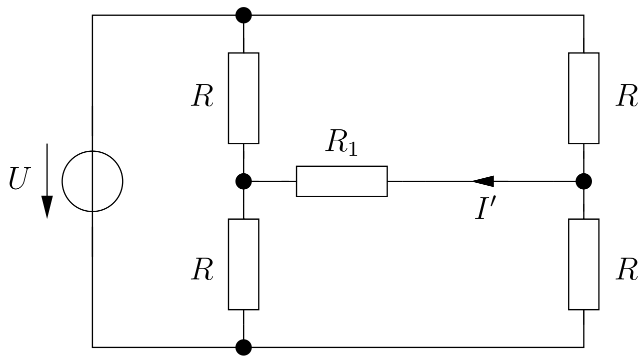
Ein Gleichstromnetzwerk besteht aus vier Widerständen R, einem weiteren Widerstand $R_1 = 2R$ und zwei idealen Spannungsquellen mit der Spannung U.



Berechnen Sie die Leistung P, die in dem Widerstand R_1 umgesetzt wird.

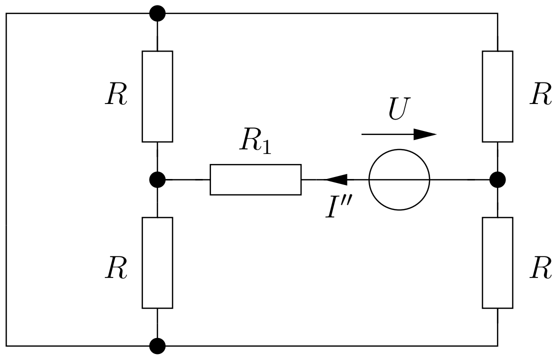
Lösung zu Aufgabe 1

Mit dem Überlagerungssatz wird der Strom I durch R_1 bestimmt. Die Leistung berechnet sich dann mit $P = I^2 \cdot R_1$.



Die linke Spannungsquelle liefert bei ausgeschalteter rechter Quelle keinen Beitrag, da dann die Brücke aus den vier Widerständen R abgeglichen ist. Es gilt also

$$I' = 0.$$



Für die rechte Quelle gilt:

$$I'' = \frac{U}{R_1 + 2(R||R)} = \frac{U}{3R}.$$

Der Gesamtstrom ist also

$$I = I' + I'' = \frac{U}{3R}.$$

Für die Leistung erhält man:

$$P = I^2 R_1 = \frac{U^2}{9R^2} \cdot 2\,R = \frac{2U^2}{9R}.$$

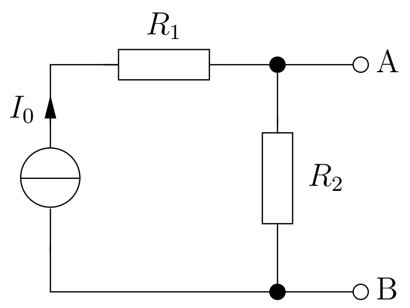
Aufgabe 2

Ein Spannungsmessgerät mit dem Innenwiderstand R_i besitzt einen Messbereich von 0 V ... 10 V. Mit Hilfe eines externen Widerstandes R_a soll der Messbereich auf 50 V erweitert werden.

a) Zeichen Sie das vollständige Schaltbild zur Erweiterung des Messbereiches des Spannungsmessgerätes.

b) Wie groß muss R_a gewählt werden?

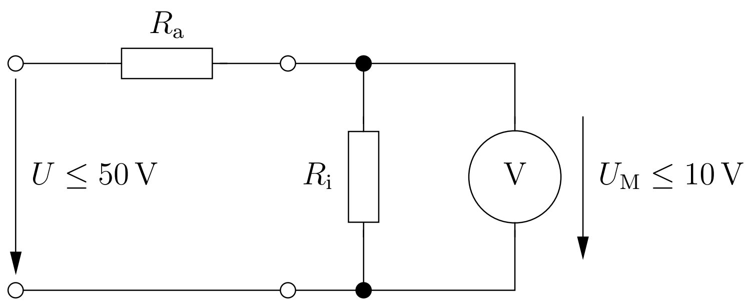
c) Die Messschaltung wird nun an die Klemmen A und B der folgenden Schaltung angeschlossen:



Berechnen Sie die Anzeige des Spannungsmessers in Abhängigkeit von allen Widerständen und dem Strom I_0.

Lösung zu Aufgabe 2

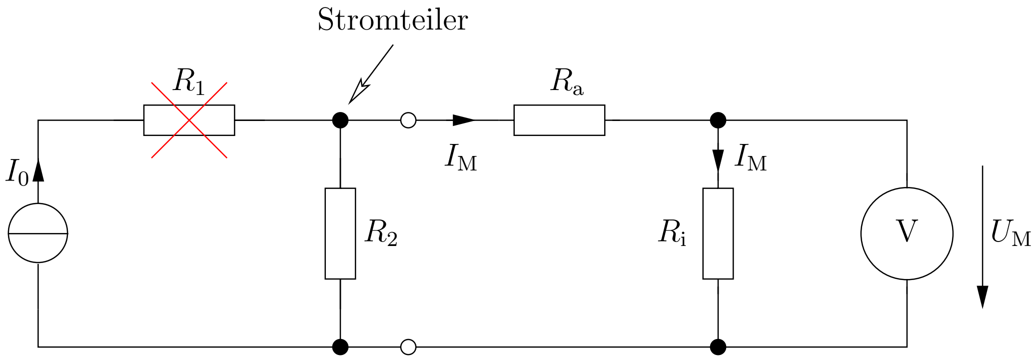
a) Messschaltung:



b) Die zu messende Spannung muss mit Hilfe des Spannungsteilers aus R_a und R_i auf 1/5 ihres Wertes reduziert werden.

$$\frac{10\ \mathrm{V}}{50\ \mathrm{V}} = \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{a} = 4R_\mathrm{i}$$

c)



Der Widerstand R_1 ist in Reihe zu einer idealen Stromquelle geschaltet und hat in Folge dessen keine Auswirkungen auf die übrige Schaltung.
Der eingezeichnete Strom I_M lässt sich durch den Stromteiler berechnen:

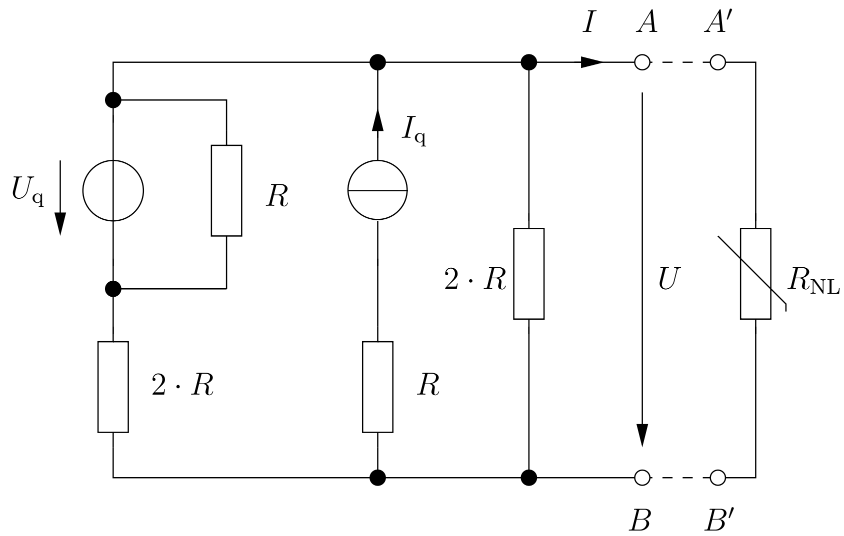
$$I_M = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_i + R_a}$$

Die gemessene Spannung erhält man mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes:

$$U_M = R_i \cdot I_M = I_0 \frac{R_i R_2}{R_2 + R_i + R_a}$$

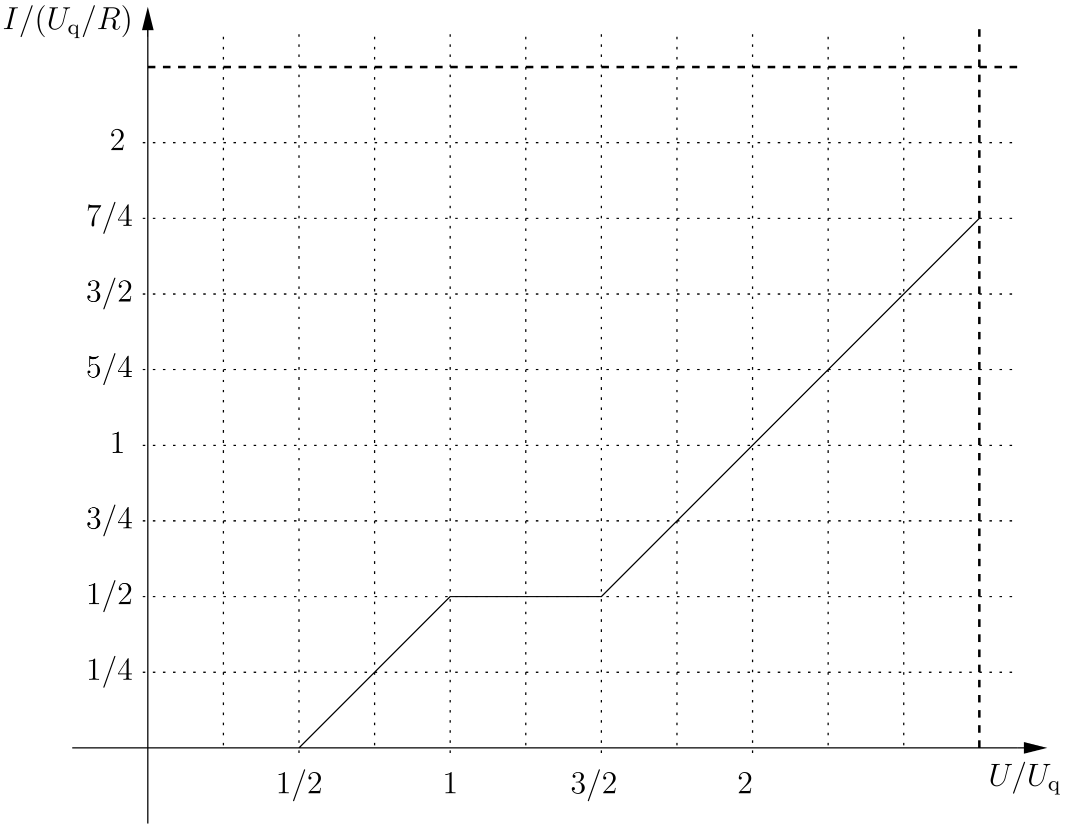
Aufgabe 3

In der Abbildung ist ein Netzwerk dargestellt, das aus 4 Widerständen, einer Spannungs- sowie einer Stromquelle besteht. An die Klemmen A und B wird ein nichtlinearer Widerstand R_{NL} angeschlossen.



a) Zunächst sind die beiden Klemmen A und B offen.
Bestimmen Sie bezüglich der Klemmen A und B eine äquivalente Spannungsquelle. Skizzieren Sie ihre Kennlinie $I(U)$.

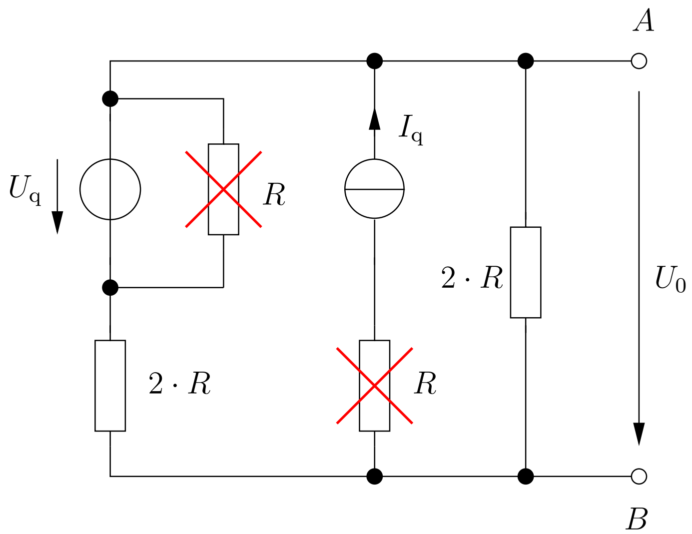
b) Im folgenden werden die Klemmen A mit A' und B mit B' verbunden.
Es gilt: $U_q = I_q \cdot R$.
Bestimmen sie mit Hilfe der Kennlinie $I(U)$ des nichtlinearen Widerstands R_{NL} den Arbeitspunkt der Schaltung. Geben Sie die Spannung und den Strom an dem nichtlinearen Widerstand an.



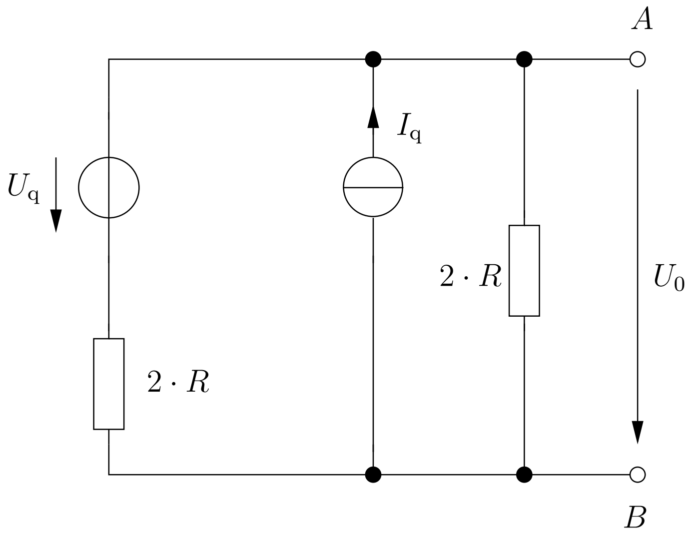
Kennlinie $I(U)$ des nichtlinearen Widerstandes

Lösung zu Aufgabe 3

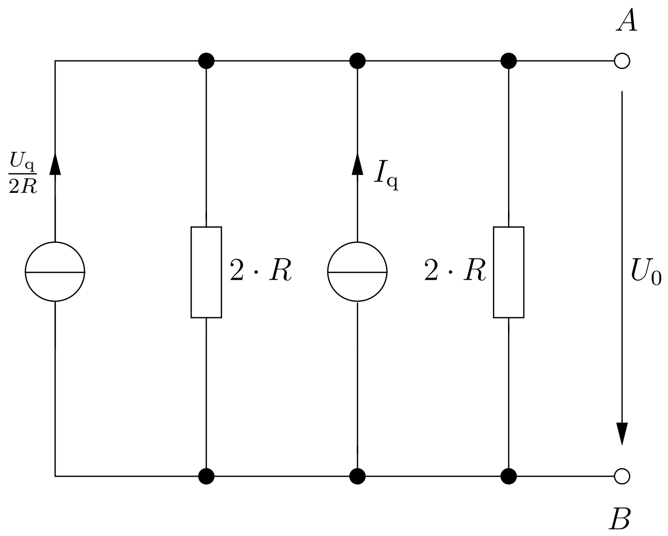
a)
In der Schaltung existieren zwei Widerstände, die keinen Einfluss auf die übrige Schaltung haben. Der eine ist parallel zu einer idealen Spannungsquelle, der andere in Reihe zu einer idealen Stromquelle geschaltet.



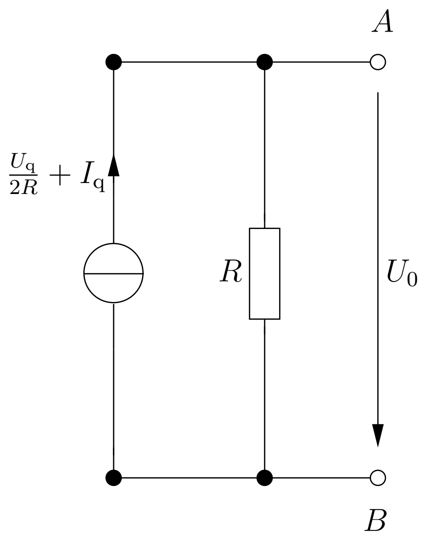
Die vereinfachte Schaltung sieht nun wie folgt aus:



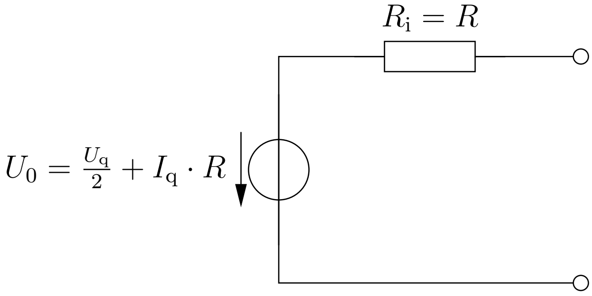
Nun lässt sich die reale Spannungsquelle in eine reale Stromquelle umwandeln:



Die beiden realen Stromquellen lassen sich zu einer zusammenfassen:



Diese reale Stromquelle lässt sich in eine reale Spannungsquelle umwandeln, die dann die gesuchte Ersatzspannungsquelle darstellt.

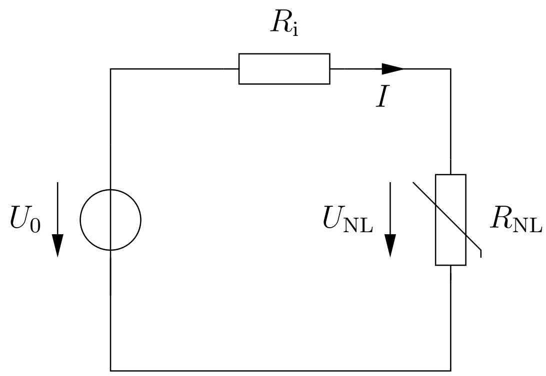


$$
\begin{aligned}
R_\mathrm{i} &= R\,. &(1.1)\\
U_0 &= \frac{U_q}{2} + I_q \cdot R\,. &(1.2)
\end{aligned}
$$

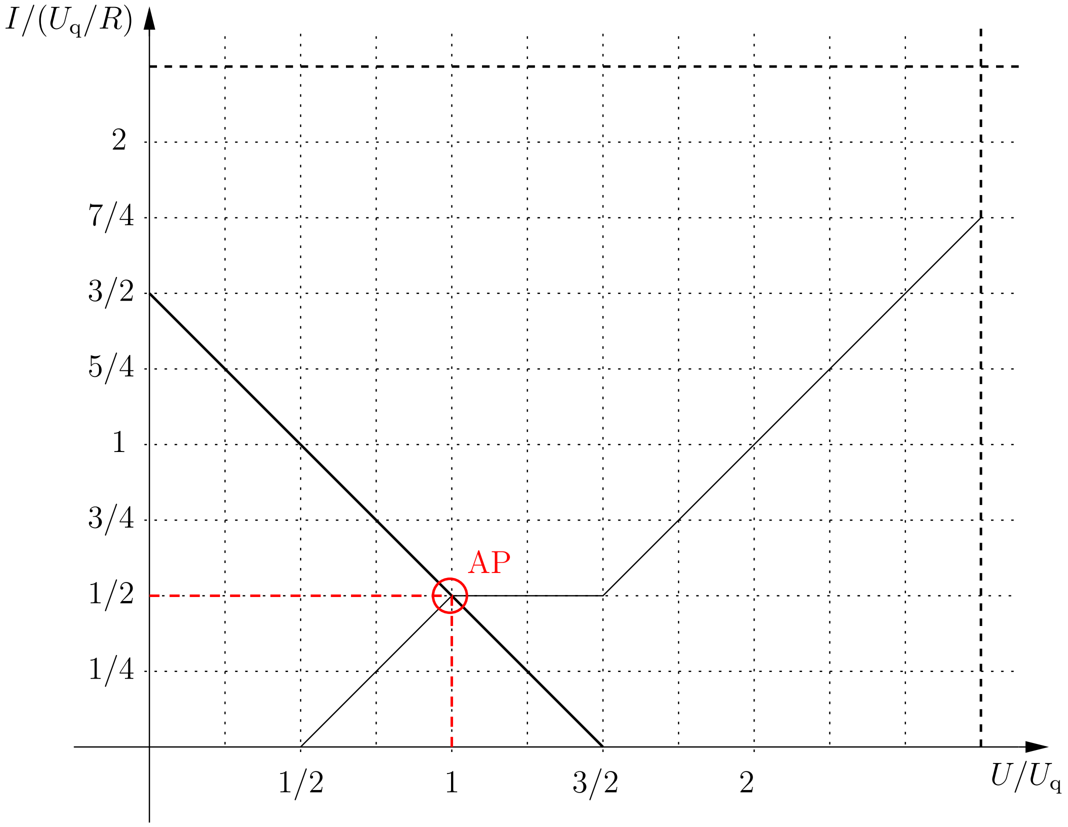
b) Es gilt nun $U_\mathrm{q} = I_\mathrm{q} R$. Damit berechnet sich die neue Leerlaufspannung U_0 und der Kurzschlussstrom der Ersatzspannungsquelle wie folgt:

$$
\begin{aligned}
U_0 &= \frac{U_\mathrm{q}}{2} + I_\mathrm{q} \cdot R = \frac{3}{2} U_\mathrm{q}\\
I_\mathrm{k} &= \frac{U_0}{R_\mathrm{i}} = \frac{\frac{3}{2} U_\mathrm{q}}{R} = \frac{3}{2} \frac{U_\mathrm{q}}{R}
\end{aligned}
$$

An die Ersatzspannungsquelle wird der nichtlineare Widerstand angeschlossen .



In das Diagramm der nichtlinearen Widerstandskannlinie lässt sich nun die Ausgangskennlinie der Ersatzspannungsquelle (die vollständig durch U_0 und I_k definiert ist) einzeichnen.



Kennlinie $I(U)$ des nichtlinearen Widerstandes mit Arbeitsgerade

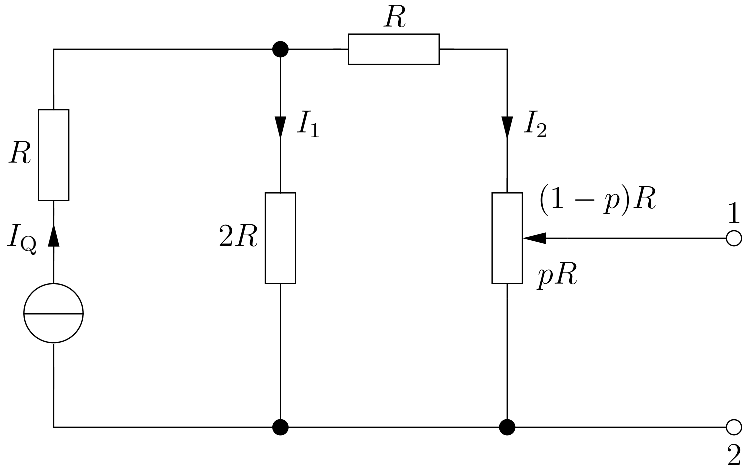
Durch Ablesen der Arbeitspunktes ergebt sich:

$$U_{NL} = U_q\,. \tag{1.3}$$

$$I_{NL} = \frac{1}{2}\frac{U_q}{R}\,. \tag{1.4}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die folgende Schaltung mit $I_\mathrm{Q} = 1\,\mathrm{A}$ und $R = 1\,\Omega$. Der Parameter p des Potentiometers kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen ($0 \leq p \leq 1$).



a) Wandeln Sie die Schaltung bezüglich der Klemmen 1 und 2 in eine äquivalente Ersatzspannungsquelle um und geben Sie deren Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i in Abhängigkeit von p, R und I_Q an.

b) Wandeln Sie die Ersatzspannungsquelle in eine Ersatzstromquelle um und geben sie deren charakterische Parameter als Funktion von p, R und I_Q an.

c) Berechnen Sie unter Verwendung der gegebenen Werte für I_Q und R die Werte von R_i und U_0 für die mittlere Schleiferstellung des Potentiometers ($p = 0{,}5$).

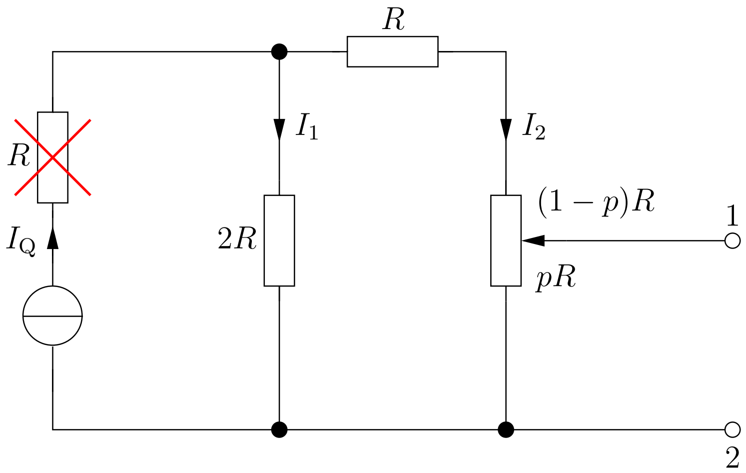
An die Klemmen 1 und 2 wird ein Widerstand R_A angeschlossen:

d) Wie muss R_A in Abhängigkeit von p gewählt werden damit der Ersatzspannungsquelle die maximale Leistung entnommen werden kann?

e) Wie groß ist die maximal von R_A aufgenommene Leistung bei den in Aufgabenteil c) gegebenen und berechneten Werten für die Schaltung?

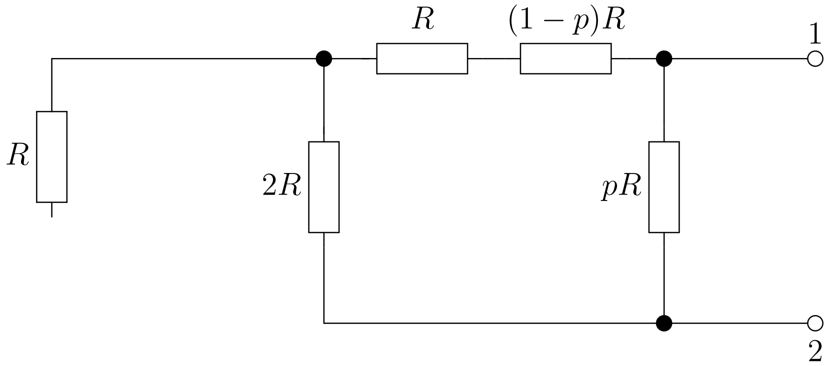
Lösung zu Aufgabe 4

a) Zunächst lässt sich feststellen, dass sich ein Widerstand in Reihe zu einer idealen Stromquelle befindet. Dieser Widerstand hat also keinerlei Auswirkung auf die übrige Schaltung und kann weggelassen werden.



- Bestimmen der Leerlaufspannung
  - Der Strom I_2 berechnet sich mit Hilfe des Stomteilers:
    $$I_2 = I_Q \frac{2R}{2R + R + (1-p)R + pR} = I_Q \frac{2R}{4R} = I_Q/2.$$
  - Für die Spannung an den Klemmen gilt:
    $$U_{12} = pR \cdot I_2 = pR \cdot I_Q/2.$$
    Dies ist gleichzeitig die gesuchte Leerlaufspannung $U_0 = U_{12}$.
- Bestimmen des Innenwiderstandes

  Stromquelle abschalten = Leerlauf → Widerstand R im linken Zweig wird nicht berücksichtigt.



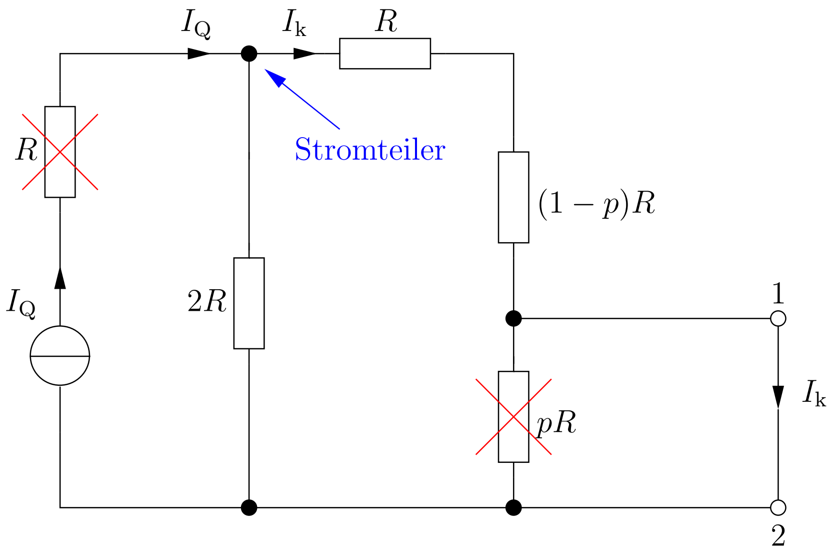
$$\begin{aligned}
R_i &= pR||[2R + R + (1-p)R] = pR||[(4-p)R] \\
G_i &= \frac{1}{R\cdot(4-p)} + \frac{1}{pR} \\
&= \frac{p}{pR\cdot(4-p)} + \frac{4-p}{pR\cdot(4-p)} = \frac{4}{pR\cdot(4-p)} \\
R_i &= \frac{1}{4}pR\cdot(4-p)
\end{aligned}$$

b) Der Strom I_k berechnet sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes:

$$\begin{aligned} I_\mathrm{k} &= \frac{U_0}{R_\mathrm{i}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot I_\mathrm{Q}\cdot pR}{\frac{1}{4}pR\cdot(4-p)} \\ &= \frac{2I_\mathrm{Q}}{4-p}. \end{aligned}$$

Alternativer Weg zur Bestimmung von I_k:

Kurzschluss zwischen den Klemmen 1 und 2 (Widerstand pR ist kurzgeschlossen).



Stromteilerregel:

$$I_\mathrm{k} = I_{12} = I_\mathrm{Q}\frac{2R}{4R-pR} = \frac{2I_\mathrm{Q}}{4-p},$$

daraus kann zu Kontrolle R_i berechnet werden:

$$R_i = \frac{U_0}{I_\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\cdot I_\mathrm{Q}\cdot pR\cdot\frac{4-p}{2I_Q} = \frac{1}{4}(4-p)\cdot pR.$$

Der Innenleitwert berechnet sich aus R_i

$$G_\mathrm{i} = \frac{1}{R_\mathrm{i}} = \frac{4}{(4-p)\cdot pR} \tag{1.5}$$

c)

$$U_0 = \frac{1}{2}\cdot I_\mathrm{Q}\cdot pR = \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{A}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\Omega = \frac{1}{4}\,\mathrm{V} = 0{,}25\,\mathrm{V} \tag{1.6}$$

$$R_\mathrm{i} = \frac{1}{4}pR\cdot(4-p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\Omega\cdot(4-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}\cdot\frac{7}{2}\cdot 1\Omega = \frac{7}{16}\Omega \tag{1.7}$$

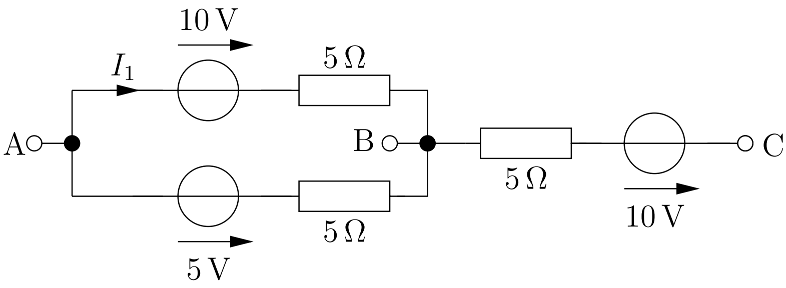
d) maximale Leistungsentnahme

- bei Leistungsanpassung $\rightarrow R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{i}} = \frac{1}{4} pR \cdot (4-p)$
- Spannung gleichmäßig auf beide Widerstände aufgeteilt

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{A,max}} &= \frac{\left(\frac{U_0}{2}\right)^2}{R_i} = \frac{\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot I_{\mathrm{Q}}\cdot pR}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}pR\cdot(4-p)}) = \frac{\frac{1}{4}\cdot pR\frac{1}{4}I_{\mathrm{Q}}^2\cdot pR}{\frac{1}{4}pR\cdot(4-p)}) \\
&= \frac{p}{4(4-p)} I_{\mathrm{Q}}^2 \cdot R = \frac{1}{8(\frac{7}{2})} \cdot (1A)^2 \cdot 1\Omega \\
P_{\mathrm{A,max}} &= \frac{1}{28}\,\mathrm{W} = 36\,\mathrm{mW}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gegeben ist die folgende Schaltung:



a) Berechnen Sie den Wert von I_1.

b) Berechnen Sie den Wert der Spannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B.

c) Zeichnen Sie für diese Schaltung eine Ersatz*strom*quelle bezüglich der Klemmen A und C und ermitteln Sie deren Kurzschlussstrom I_{k} und Innenwiderstand R_{i}. Wandeln Sie hierfür die beiden parallel liegenden realen Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen um und fassen Sie diese zusammen.

Lösung zu Aufgabe 5

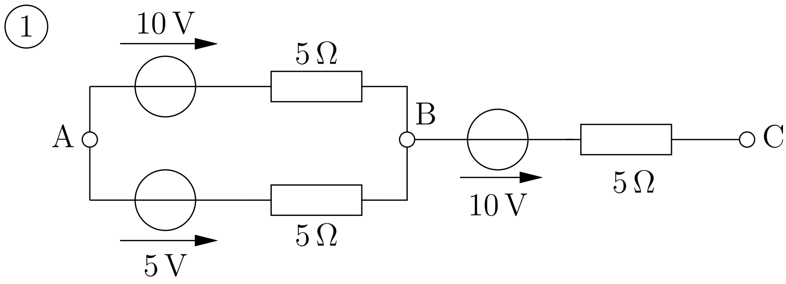
a) Machenumlauf:

$$\begin{aligned} 0 &= 10\,\mathrm{V} + I_1 5\,\Omega + I_1 5\,\Omega - 5\,\mathrm{V} \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{-5\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

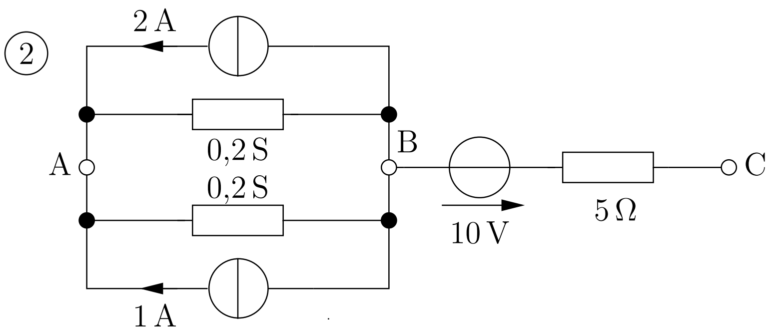
b)

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{AB}} &= 10\,\mathrm{V} + I_1 \cdot 5\,\Omega \\ &= 10\,\mathrm{V} - 0{,}5\,\mathrm{A} \cdot 5\,\Omega \\ &= 7{,}5\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

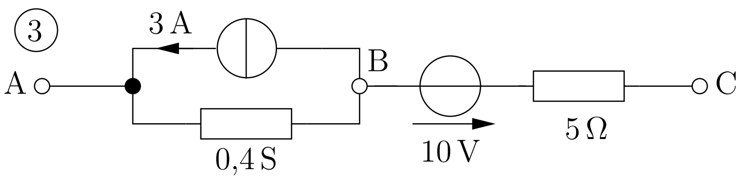
c) Umwandlung:



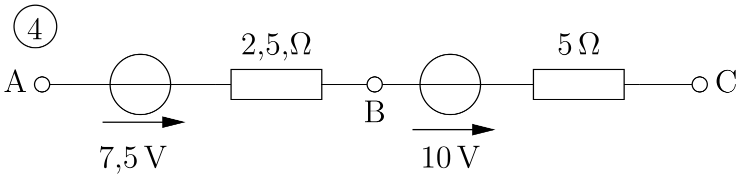
=



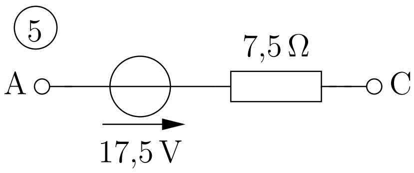
=



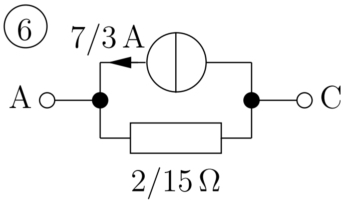
=



=



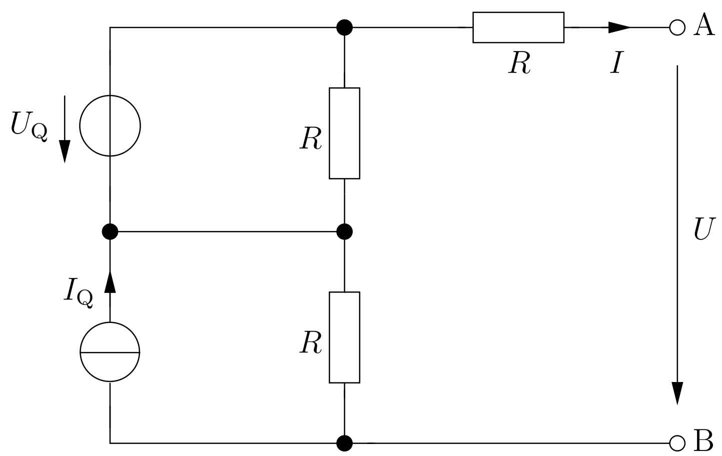
=



$I_\text{k} = \frac{7}{3}\,\text{A}$, $R_\text{i} = 7{,}5\,\Omega$.

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Netzwerk, das aus einer idealen Gleichspannungsquelle U_Q, einer idealen Gleichstromquelle I_Q und drei linearen Widerständen R besteht.



a) Wandeln Sie die Schaltung bezüglich der Klemmen A und B in eine äquivalente Ersatzspannungsquelle um.

Für das Folgende gilt: $U_Q = 1$ V, $I_Q = 2$ A, $R = 0{,}25\ \Omega$.

b) Skizzieren Sie den Verlauf des Klemmenstromes I als Funktion der Klemmenspannung U.

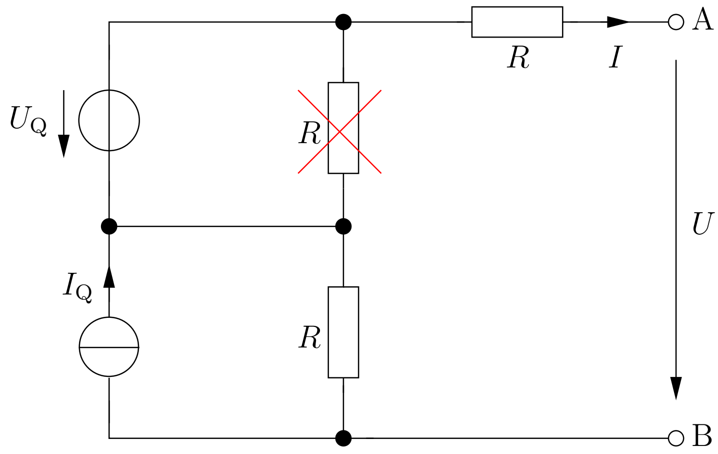
c) An die Klemmen A und B wird nun ein nichtlineares Bauelelement angeschlossen, das folgenden Zusammenhang zwischen Strom und Spannung besitzt:

$$I = k \cdot U^2 \quad \text{mit} \quad k = 1\text{A/V}^2.$$

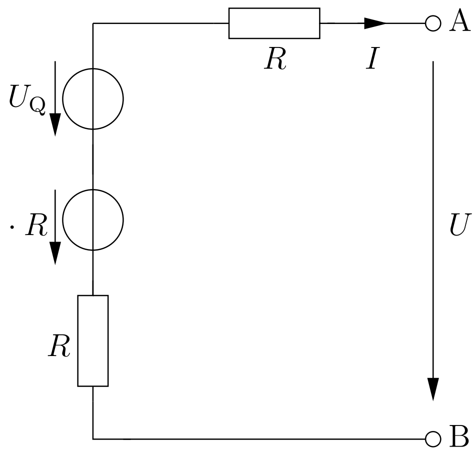
Bestimmen Sie auf grafischem Weg die sich einstellende Spannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Der Widerstand parallel zur idealen Spannungsquelle hat keine Auswirkungen auf den Rest der Schaltung.



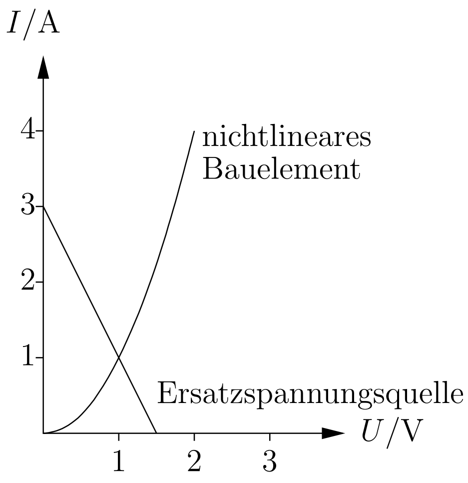
Die reale Stromquelle, bestehend aus I_Q und R lässt sich in eine reale Spannungsquelle umwandeln.



Somit gilt

$$U_0 = U_Q + I_Q \cdot R,$$
$$R_i = 2R.$$

b) c)

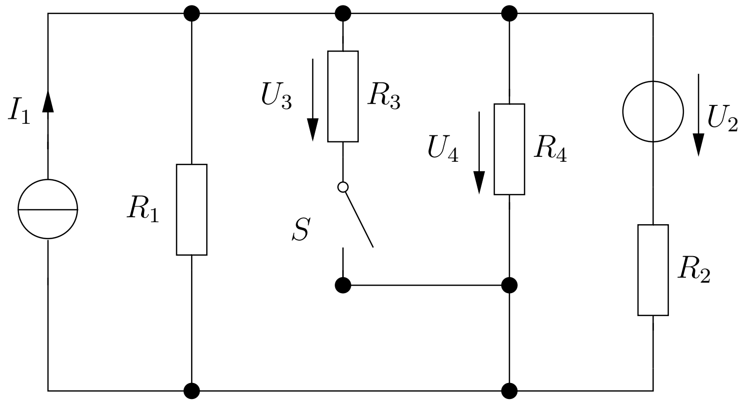


Zwischen den Klemmen A und B fällt also die Spannung $U_{\mathrm{AB}} = 1\,\mathrm{V}$ ab.

Aufgabe 7

Gegeben ist ein Gleichstromnetzwerk mit den folgenden Größen:

$I_1 = 300$ mA, $R_1 = 200\ \Omega$,
$U_2 = 20$ V, $R_2 = 100\ \Omega$,
$R_4 = 600\ \Omega$.



a) Zunächst ist der Schalter S geöffnet. Bestimmen Sie die Spannungen U_3 und U_4, die an den Widerständen R_3 und R_4 abfallen.

b) Der Schalter S wird nun geschlossen. Für welchen Wert von R_3 wird durch die Widerstände R_3 und R_4 dem übrigen Netzwerk eine maximale Leistung entnommen?

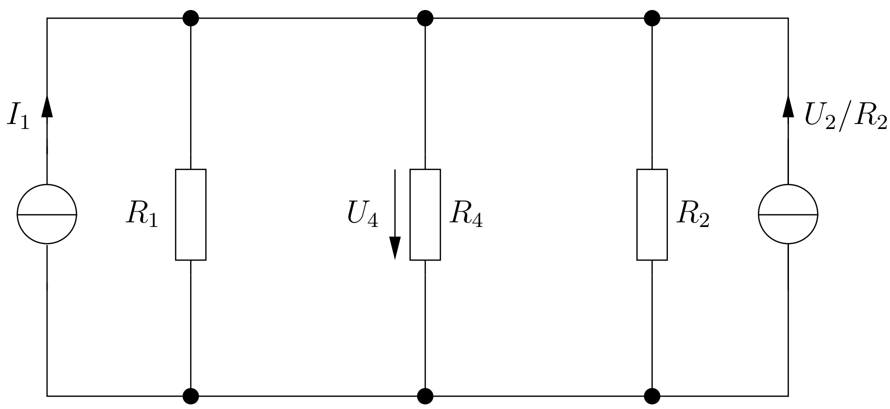
Hinweis: Durch geschickte Umformung des Netzwerkes kann der Rechenweg erheblich vereinfacht werden.

Lösung zu Aufgabe 7

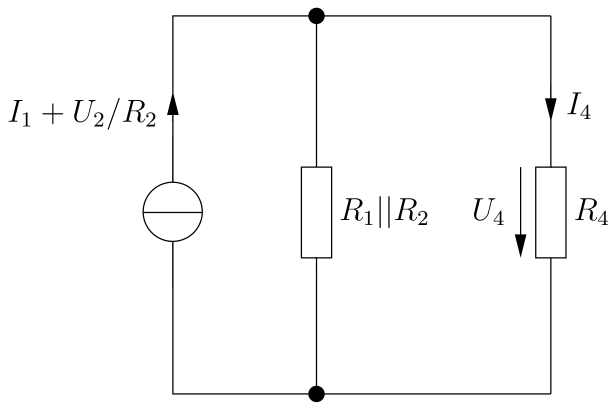
a) Da der Schalter S geöffnet ist, fließt kein Strom durch R_3 und folglich ist

$$U_3 = 0.$$

Um die Spannung U_4 bestimmen zu können, wird der Rest der Schaltung in eine Ersatzstromquelle umgewandelt. Zunächst wird die reale Spannungsquelle, bestehend aus U_2 und R_2 in eine äquivalente Stromquelle umgewandelt.



Nun können die beiden realen Stromquellen zusammengefasst werden.



Die Eratzstromquelle besitzt also den Kurzschlusstrom

$$I_\mathrm{k} = I_1 + U_2/R_2 = 500\,\mathrm{mA}$$

und den Innenwiderstand

$$R_\mathrm{i} = R_1||R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{3}\,\Omega.$$

Mit Hilfe des Stromteilers lässt sich der Stom in R_4 berechnen:

$$I_4 = I_\mathrm{k}\frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_4} = 50\,\mathrm{mA}.$$

Somit gilt

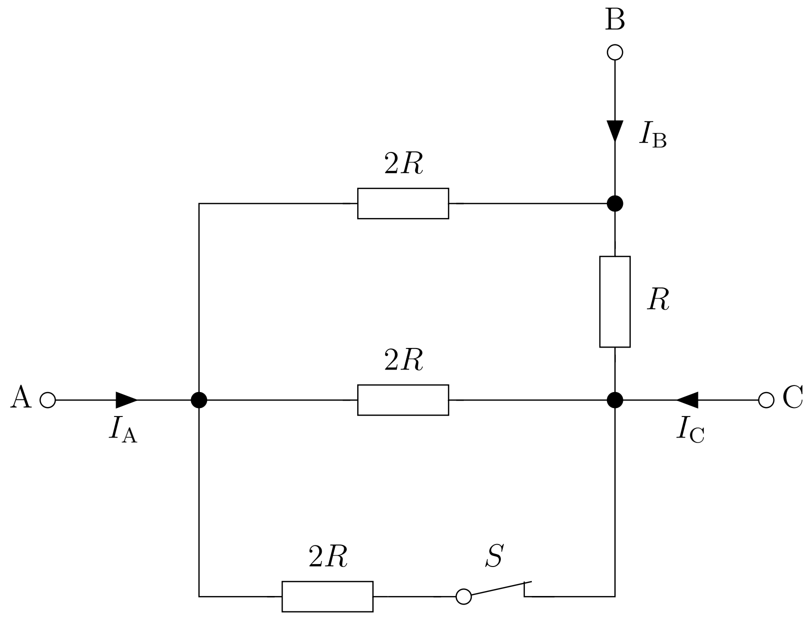
$$U_4 = R_4 I_4 = 30\,\mathrm{V}.$$

b) Damit einer realen Quelle die maximale Leistung entnommen wird, muss der Lastwiderstand so groß sein wie der Innenwiderstand (Leistungsanpassung).
In diesem Fall muss also

$$\begin{aligned}
R_3||R_4 &= R_\mathrm{i}. \\
\Rightarrow \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} &= \frac{1}{R_\mathrm{i}} \\
\frac{1}{R_3} &= \frac{1}{R_\mathrm{i}} - \frac{1}{R_4} \\
R_3 &= \frac{1}{\frac{1}{R_\mathrm{i}} - \frac{1}{R_4}} = 75\,\Omega.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Gegeben ist die folgende Schaltung. Der Schalter S ist zunächst geschlossen.



a) Bestimmen Sie den Widerstand zwischen den Klemmen A und B als Funktion von R.

Die Klemmen A, B und C werden nun mit einem externen Netzwerk verbunden. Es werden die Stöme I_{A} und I_{B} gemessen.

b) Berechnen Sie den Strom I_{C} in Abhängigkeit von I_{A} und I_{B}.

Der Schalter S wird nun geöffnet. I_{A} und I_{B} ändern sich nicht.

c) Ändert sich der Strom I_{C}? (Mit Begründung.)

Lösung zu Aufgabe 8

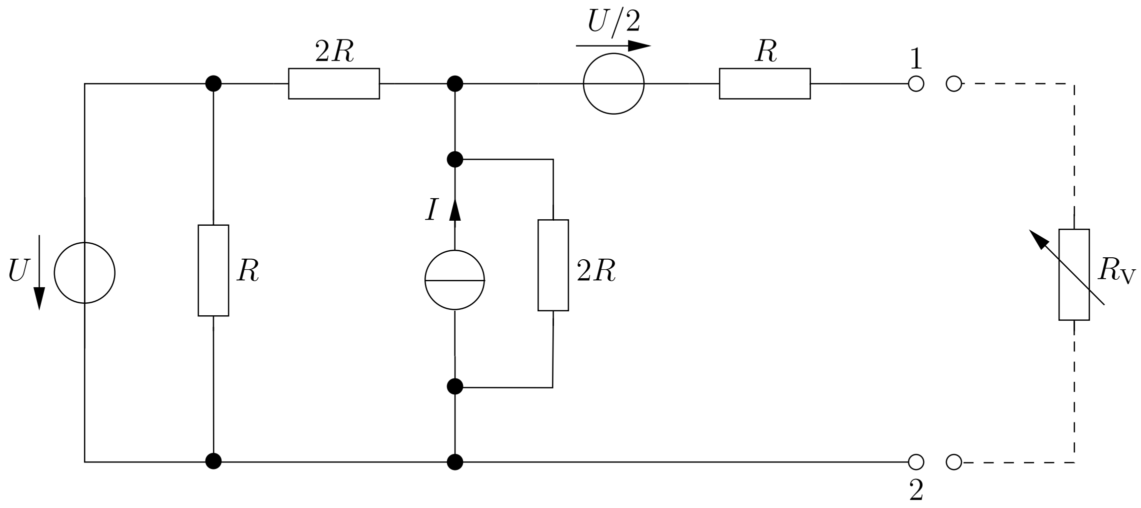
a) $R_{\mathrm{AB}} = (2R \parallel 2R + R) \parallel 2R = R$

b) In einer Schaltung können keine Ladungsträger „verschwinden“, darum gilt auch hier der Knotensatz: $I_{\mathrm{C}} = -(I_{\mathrm{A}} + I_{\mathrm{B}})$.

c) Nein, denn I_{A} und I_{B} ändern sich nicht und $I_{\mathrm{C}} = -(I_{\mathrm{A}} + I_{\mathrm{B}})$ gilt weiterhin.

Aufgabe 9

Durch das angegebene Netzwerk wird ein Verbraucher mit dem veränderbaren Widerstand R_V versorgt.



a) Wandeln Sie das Netzwerk bezüglich der Klemmen 1 und 2 in eine Ersatzspannungsquelle um und bestimmen Sie deren Kennwerte R_i und U_0.

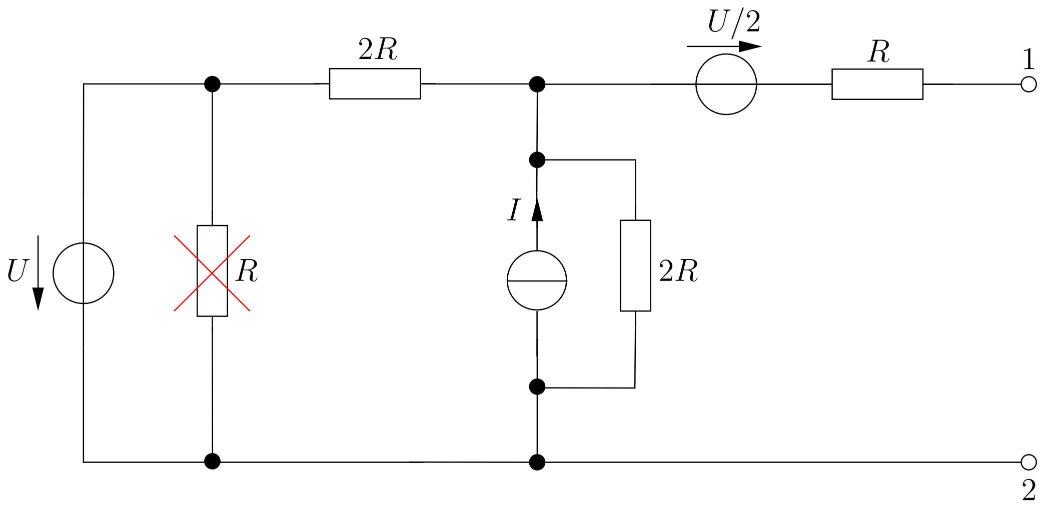
b) Wie groß ist der Kurzschlussstrom I_k der Ersatzstromquelle?

c) Bestimmen Sie den Widerstand R_V als Funktion von R, damit im Verbraucher die maximale Leistung umgesetzt wird.

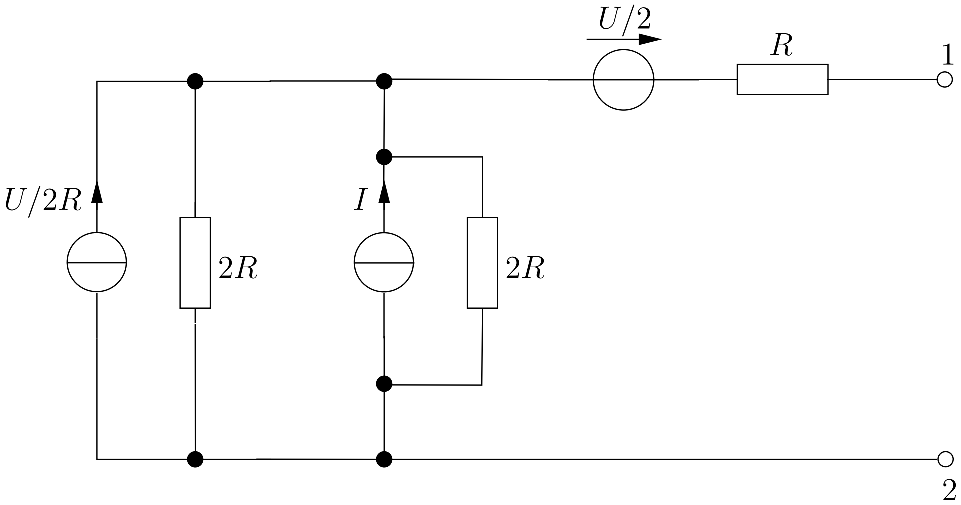
d) Bestimmen Sie für diesen Fall (c) die Leistung, die im Verbraucher umgesetzt wird.

Lösung zu Aufgabe 9

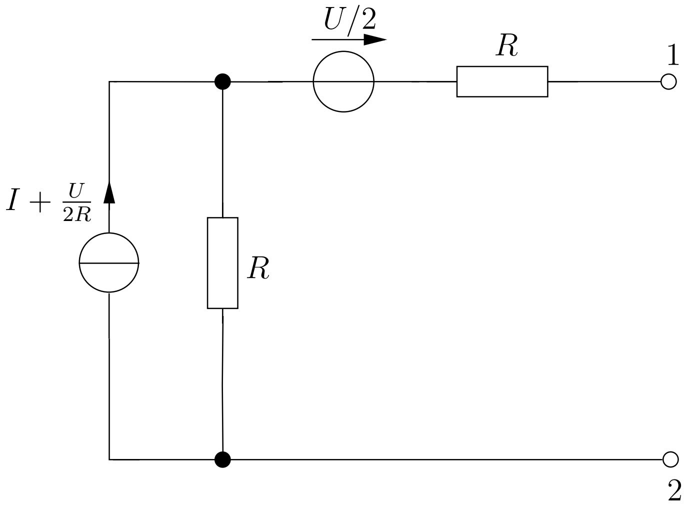
a) Im folgenden wird das Netzwerk durch Umformungen vereinfacht. Zunächst ist festzustellen, dass der Widerstand parallel zur idealen Spannungsquelle keinen Einfluss auf das übrige Netzwerk hat.



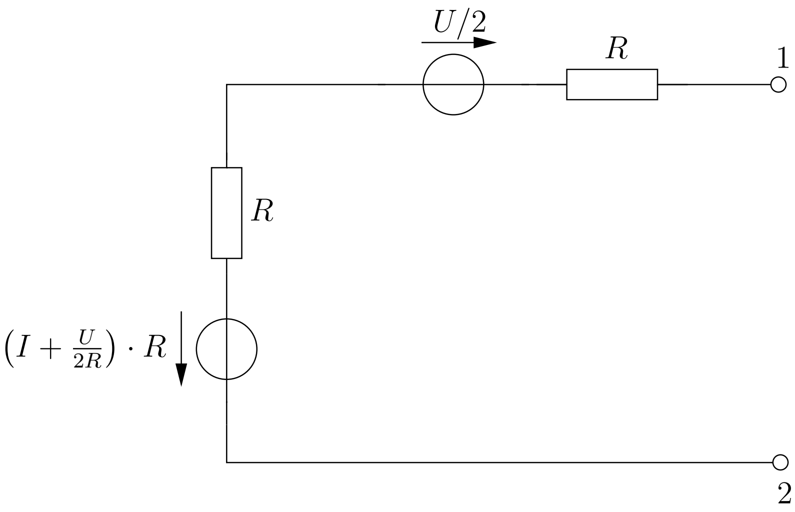
Die reale Spannungequelle, bestehend aus U und $2R$ kann in eine äquivalente reale Stromquelle umgewandelt werden.



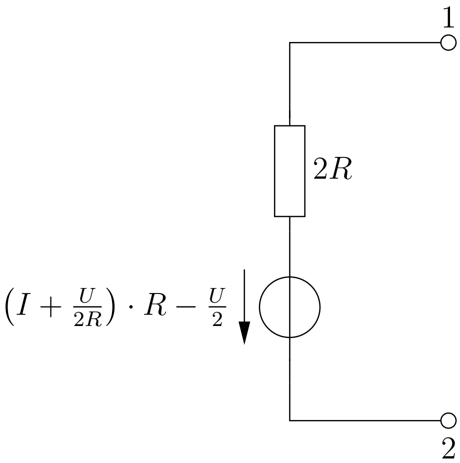
Die beiden realen Stromquellen sind parallel geschaltet und lassen sich zu einer zusammenfassen.



Die reale Stromquelle lässt sich nun in eine reale Spannungsquelle umwandeln.



Die beiden realen Spannungsquellen sind in Reihe geschaltet und lassen sich zusammenfassen.



$U_0 \; = \; RI; \quad R_\mathrm{i} \; = \; 2R \; .$

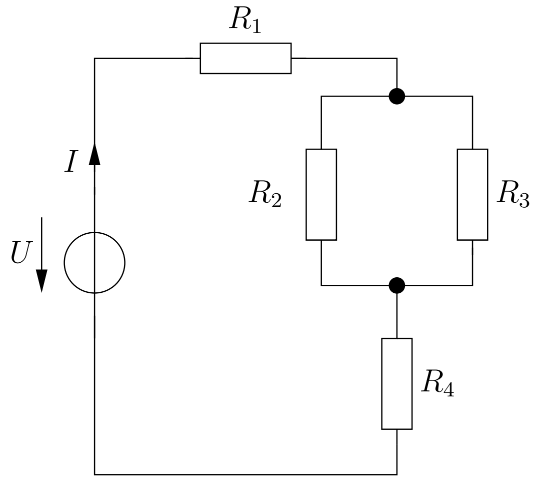
b) $I_\mathrm{k} \; = \frac{RI}{2R} \; = \; I/2 \; .$

c) Leistungsanpassung: $R_\mathrm{V} \; = \; R_\mathrm{i} \; = \; 2R \; .$

d) $P_\mathrm{max} \; = \; (U_0/2)^2/R_\mathrm{V} \; = \; RI^2/8 \; .$

Aufgabe 10

Gegeben ist die folgende Schaltung, die von einer Gleichspannung U gespeist wird.



Die Werte der Widerstände sind bekannt: $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$, $R_4 = 18\,\Omega$.
Im Widerstand R_2 wird die Leistung $P_{R_2} = 22{,}5$ W umgesetzt.
Berechnen Sie:

a) die im Widerstand R_3 umgesetzte Leistung P_{R_3},

b) den Strom I,

c) die Spannung U,

d) die Energie W_{R_3}, die in einer Stunde im Widerstand R_3 umgesetzt wird.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Die Spannungen über den Widerständen R_3 und R_2 sind gleich: $U_{R_2} = U_{R3}$. Für die Ströme durch sie gilt:

$$\frac{I_3}{I_2} = \frac{R_2}{R_3} \Rightarrow P_{R_3} = U_{R_3} I_3 = \frac{R_2}{R_3} U_{R_3} I_3 = 15\,\mathrm{W}.$$

b) Ohmsches Gesetz: $U = I \cdot R_{\mathrm{ges}}$.

$$I = I_1 + I_2 = \sqrt{\frac{P_{R_2}}{R_2}} + \sqrt{\frac{P_{R_3}}{R_3}} = 1{,}5\,\mathrm{A} + 1\,\mathrm{A} = 2{,}5\,\mathrm{A}$$

Gesamtwiderstand:

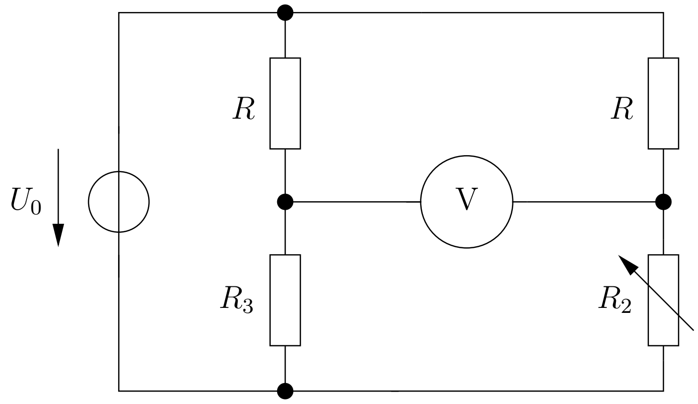
$$R_{\mathrm{ges}} = R_1 + R_4 + \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3} = 36\,\Omega.$$

c) Damit erhält man für $U = 90$ V.
d)

$$W_{R3} = I_3^2 \cdot R_3 \cdot t = P_{R_3} t = 54000\,\mathrm{Ws}.$$

Aufgabe 11

Die folgende Brückenschaltung mit den temperaturunabhängigigen Widerständen $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ und R_3 sowie dem temperaturabhängigigen Widerstand R_2 soll zur Messung von Temperaturen im Bereich von $0°$ C bis $100°$ C verwendet werden. Für den Widerstand R_2 gilt: $R_2(\vartheta_0 = 0°) = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $\alpha_{\vartheta_0} = 10^{-2}/\mathrm{K}$.
Das verwendete Voltmeter besitzt einen Skalenendwert von 10V.



a) Bestimmen Sie den Widerstand R_3 unter der Voraussetzung, dass das Voltmeter bei $0°$ C eine Spannung von 0 V anzeigt.

b) Bestimmen Sie die Spannung U_0 unter der Voraussetzung, dass die Maximaltemperatur zu einem Vollausschlag des Voltmeters führt.

c) Wie groß ist der Ausschlag des Voltmeters bei $\vartheta = 50\,°$? Kann die Skalenteilung des Voltmeters für die Temperaturmessung genutzt werden?

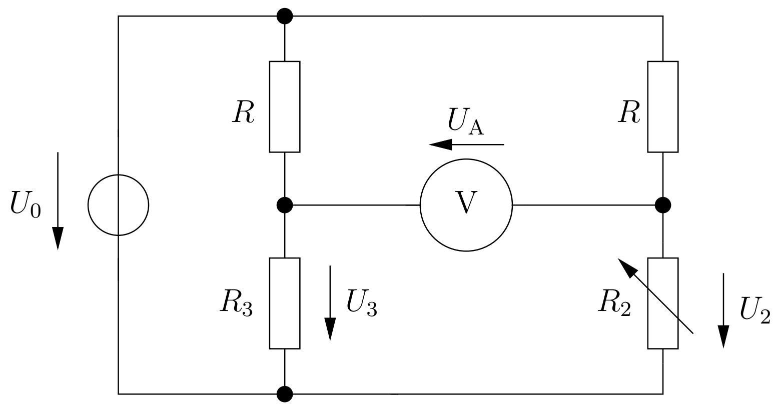
Lösung zu Aufgabe 11

a) Die Brücke muss bei $0°$ C abgeglichen sein:

$$\frac{R}{R_3} = \frac{R}{R_2} \quad \text{(allgemeine Abgleichbedingung)}$$

$$\Rightarrow R_3 = R = 1\,\mathrm{k}\Omega.$$

b) Spannung über dem Messgerät:



$$U_{\mathrm{A}} = U_2 - U_3,$$

mit

$$U_3 = \frac{R_3}{R + R_3} U_0, \qquad U_2 = \frac{R_2}{R + R_2} U_0.$$

Damit:

$$U_{\mathrm{A}} = \left(\frac{R_2}{R + R_2} - \frac{R_3}{R + R_3} \right) U_0$$

Bei $\vartheta = 100^\circ\,\mathrm{C}$ soll das Voltmeter Vollausschlag anzeigen, $U_A = 100\,\mu\mathrm{V}$. Der temperaturabhängige Widerstand hat den Wert $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}(1 + 0{,}011/\mathrm{K} \cdot 100\,\mathrm{K}) = 2\,\mathrm{k\Omega}$. Ergebnis:

$$U_0 = \frac{10\mathrm{V}}{\frac{2\mathrm{k\Omega}}{3\mathrm{k\Omega}} - \frac{1\mathrm{k\Omega}}{2\mathrm{k\Omega}}} = 60\,\mathrm{V}.$$

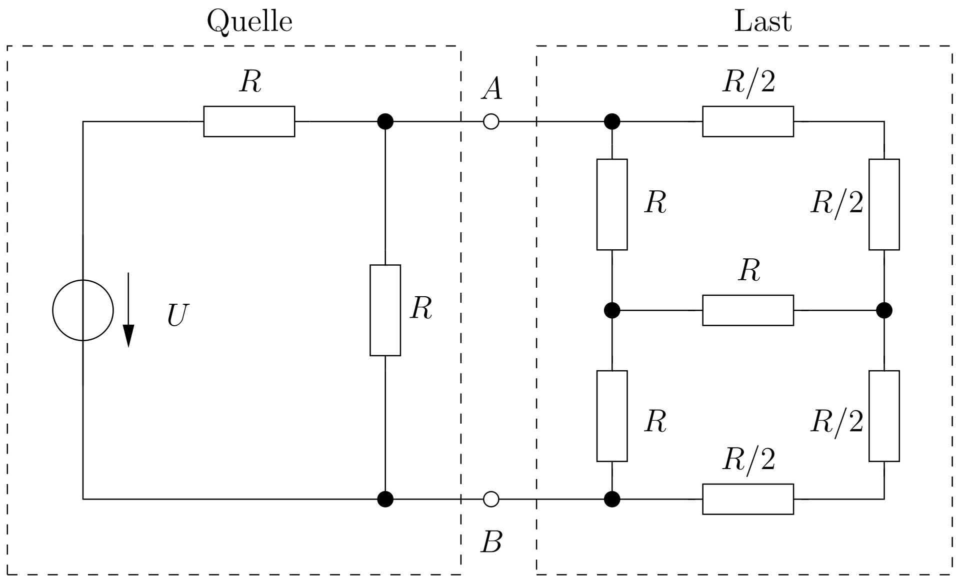
c)

$$U_{\mathrm{A}} = U_0 \left(\frac{1{,}5}{2{,}5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{U_0}{10} = 6\,\mathrm{V}.$$

Nein, es ist eine nichtlineare Skalenteilung erforderlich.

Aufgabe 12

Eine Spannungsquelle wird mit einem Lastnetzwerk verbunden, siehe Skizze. Die Werte für U und R sind bekannt.



a) Berechnen Sie die im Lastnetzwerk umgesetzte Leistung P in Abhängigkeit von U und R.

b) Welche Leistung P_2 wird insgesamt in den beiden in der Quelle enthaltenen Widerständen R umgesetzt?

Lösung zu Aufgabe 12

a) Erster Schritt: Umwandeln der Quelle in eine Ersatzspannungsquelle:

$$U_\mathrm{L} = \frac{U}{2}, R_\mathrm{i} = \frac{R}{2}.$$

Zweiter Schritt: Zusammenfassen der Lastwiderstände. Ergebnis:

$$R_\mathrm{L} = R.$$

Strom aus der Klemme A:

$$I = \frac{U}{2}\frac{2}{3\,R}. = \frac{1}{3}\frac{U}{R}.$$

Leistung:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{1}{9}\frac{U^2}{R}.$$

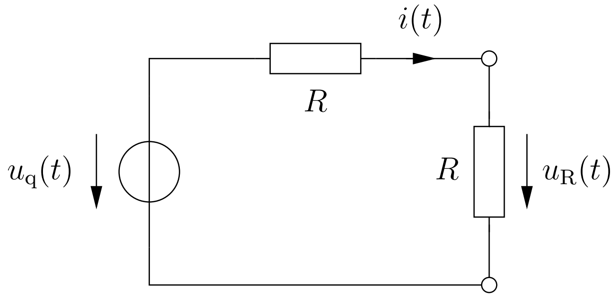
b)

$$P_2 = \frac{(U/3)^2}{R} + (2I)^2 R = \frac{U^2}{R}(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}) = \frac{5}{9}\frac{U^2}{R} \neq I^2 R_\mathrm{i}$$

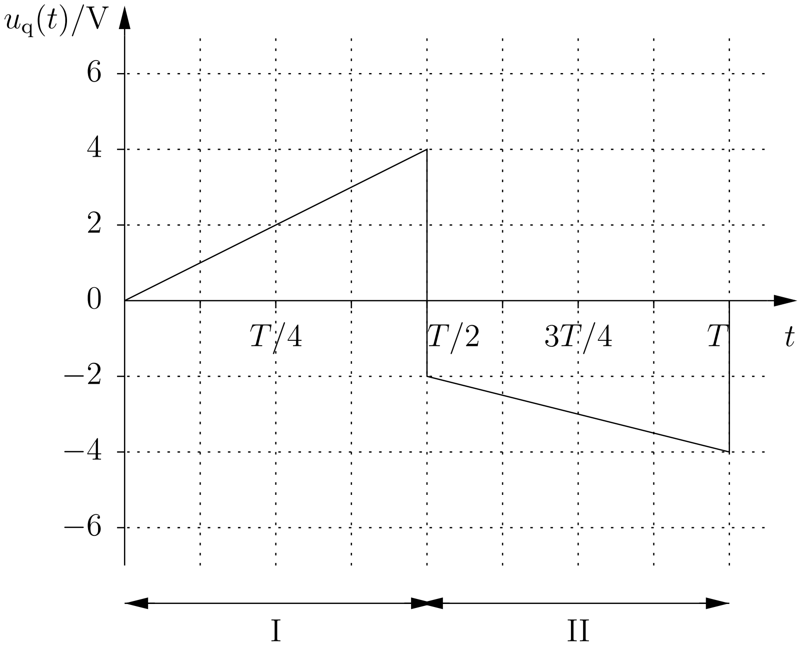
1.2 Mittelwert, Gleichrichtwert, Effektivwert

Aufgabe 13

Eine reale Spannungsquelle mit der zeitveränderlichen Spannung $u_q(t)$ und dem Innenwiderstand R ist an einen linearen Widerstand R angeschlossen:



Die Spannung $u_q(t)$ ist eine zeitabhängige Größe und hat den folgenden Verlauf:



Berechnen Sie

a) den Mittelwert $\overline{u}_R(t)$ der Spannung u_R ,

b) den Gleichrichtwert $\overline{|u_R(t)|}$ der Spannung u_R und den

c) Effektivwert U_R der Spannung $u_R(t)$ der Spannung u_R.

Lösung zu Aufgabe 13

a) und b)

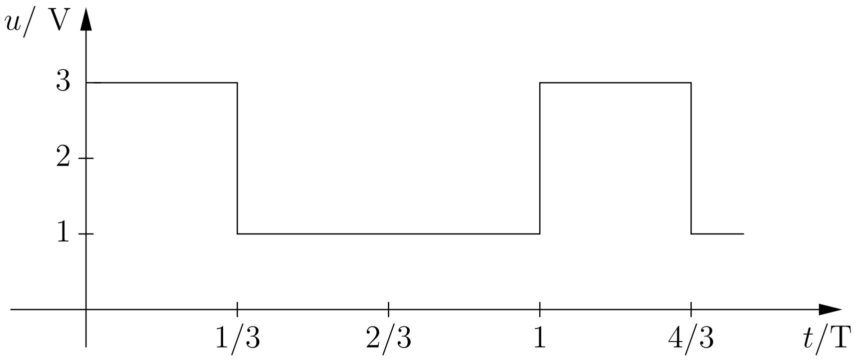
$$
\begin{aligned}
|u_\mathrm{R}(t)| &= \frac{1}{T}\cdot\int_0^T u_\mathrm{R}(t)\cdot\,\mathrm{d}t\,,\\
|u_\mathrm{R}(t)| &= \frac{1}{T}\cdot\left(0.5\cdot 2V\cdot\frac{T}{2}-1V\cdot\frac{T}{2}-0.5\,\cdot 1V\cdot\frac{T}{2}\right)=-\frac{1}{4}\,\mathrm{V}.\\
|\overline{u_\mathrm{R}(t)}| &= \frac{1}{T}\cdot\left(0.5\cdot 2V\cdot\frac{T}{2}+1V\cdot\frac{T}{2}+0.5\,\cdot 1V\cdot\frac{T}{2}\right)=1\frac{1}{4}\,\mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
U_R &= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u_\mathrm{R}(t)^2\cdot\,\mathrm{d}t}\,,\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\left(\frac{4}{T}\cdot t\right)^2\cdot\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^{T}\left(\frac{2}{T}\cdot t\right)^2\cdot\,\mathrm{d}t\right]}\,\mathrm{V}\,,\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2}\frac{16}{T^2}\cdot t^2\cdot\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^{T}\frac{4}{T^2}\cdot t^2\cdot\,\mathrm{d}t\right]}\cdot\mathrm{V}\,,\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{16}{3T^2}\cdot\frac{T}{8}+\frac{4}{3}T-\frac{4}{3\cdot 8}T\right)}\cdot\mathrm{V}\,,\\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\left[\frac{16}{24}T+\frac{32}{24}T-\frac{4}{24}T\right]}\,\mathrm{V}=\sqrt{\frac{11}{6}}\mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 14

Gegeben ist eine periodisch zeitabhängige Spannung $u(t)$ mit der Periodendauer T und dem nachfolgend skizzierten Verlauf:



Bestimmen Sie:

a) den arithmetischen Mittelwert $\overline{u(t)}$ von $u(t)$,

b) den Wechselanteil $u_\sim(t)$ von $u(t)$ (skizzieren Sie $u_\sim(t)$),

c) den Gleichrichtwert von $u_\sim(t)$,

d) den Effektivwert von $u_\sim(t)$,

e) den Effektivwert von $u(t)$.

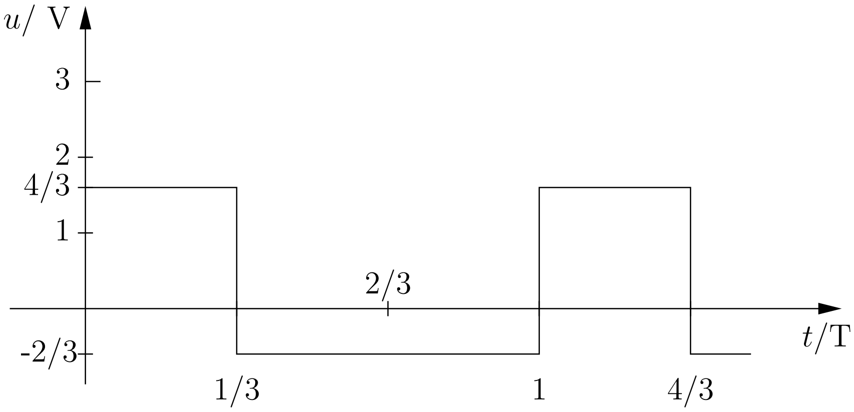
Lösung zu Aufgabe 14

a) Zunächst wird der Gleichanteil benötigt:

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(3\,\mathrm{V}\,\frac{T}{3} + 1\,\mathrm{V}\,\frac{2T}{3}\right) = 1\frac{2}{3}\ \mathrm{V} = \frac{5}{3}\ \mathrm{V}.$$

b) Wechselanteil

$$u_\sim = u(t) - \overline{u} = \begin{cases} 4/3\,\mathrm{V} & \text{für} \quad 0 \le t \le T/3, \\ -2/3\,\mathrm{V} & \text{für} \quad T/3 \le t \le T. \end{cases}$$



c) Gleichrichtwert des Wechselanteils

$$\overline{|u_\sim|} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} |u_\sim|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(\frac{4}{3}\,\mathrm{V}\,\frac{T}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{V}\,\frac{2T}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\right)\,\mathrm{V} = \frac{8}{9}\,\mathrm{V}.$$

d) Effektivwert des Wechselanteils

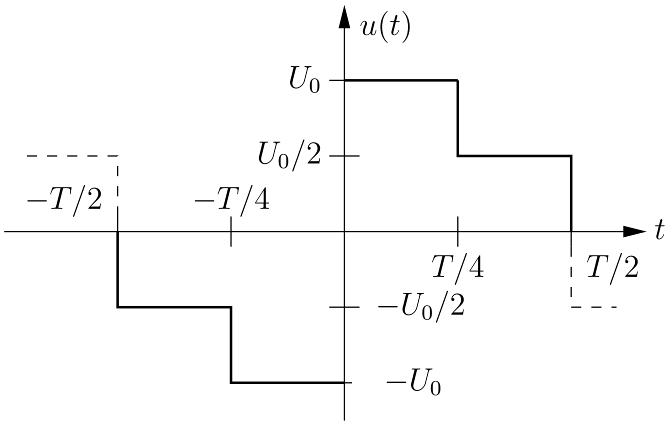
$$\begin{aligned}
U_\sim &= \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} u_\sim^2\,\mathrm{d}t},\\
U_\sim^2 &= \frac{1}{T}\left(\frac{16}{9}\,\mathrm{V}^2\,\frac{T}{3} + \frac{4}{9}\,\mathrm{V}^2\,\frac{2T}{3}\right),\\
U_\sim^2 &= \left(\frac{16}{27}+\frac{8}{27}\right)\,\mathrm{V}^2 = \frac{24}{27}\,\mathrm{V}^2 = \frac{8}{9}\,\mathrm{V}^2,\\
U_\sim &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{V}.
\end{aligned}$$

e) Effektivwert des Spannung $u(t)$:

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} u^2\,\mathrm{d}t},\\
U^2 &= \frac{1}{T}\left(9\,\mathrm{V}^2\,\frac{T}{3} + 1\,\mathrm{V}^2\,\frac{2T}{3}\right),\\
U &= \sqrt{\frac{11}{3}}\,\mathrm{V} = \sqrt{U_\sim^2 + \overline{u}^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15

Eine Spannungsquelle liefert eine periodische Spannung $u(t)$ (Periodendauer T) mit dem skizzierten Verlauf:



a) Berechnen Sie den Mittelwert der Spannung $u(t)$.

b) Berechnen Sie den Gleichrichtwert der Spannung $u(t)$.

Die Spannungsquelle wird an einen Widerstand R angeschlossen.

c) Berechnen Sie die Spannung U einer Gleichspannungsquelle, die an den Widerstand R dieselbe Leistung liefert wie $u(t)$ im zeitlichen Mittel.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $\overline{u} = 0$
b)

$$\begin{aligned}
\overline{|u|} &= \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} |u|\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2} u\,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{2}{T}\left(U_0\frac{T}{4} + \frac{U_0}{2}\frac{T}{4}\right), \\
&= \frac{3U_0}{4}.
\end{aligned}$$

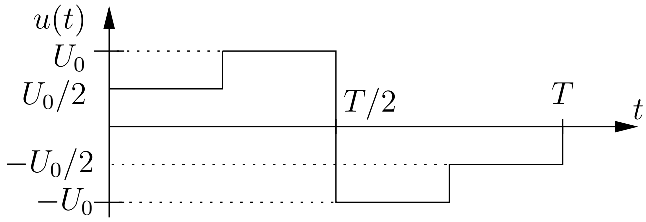
c) Gefragt ist hier natürlich nach dem Effektivwert der Spannung.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} u^2\,\mathrm{d}t},$$

$$
\begin{aligned}
U^2 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u^2 \,\mathrm{d}t, \\
U^2 &= \frac{2}{T}\left(U_0^2\frac{T}{4} + \frac{U_0^2}{4}\frac{T}{4}\right), \\
U^2 &= \frac{5U_0^2}{8}, \\
U &= U_0\sqrt{\frac{5}{8}}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 16

Eine periodische zeitveränderliche Spannung $u(t)$ mit der Peridendauer T hat den unten skizzierten Verlauf:



a) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert von $u(t)$..

b) Berechnen Sie den Gleichrichtwert $\overline{|u(t)|}$ von $u(t)$.

c) Berechnen Sie den den Effektivwert U_{eff} von $u(t)$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\overline{u} = 0$ durch Kästchenzählen.
b)

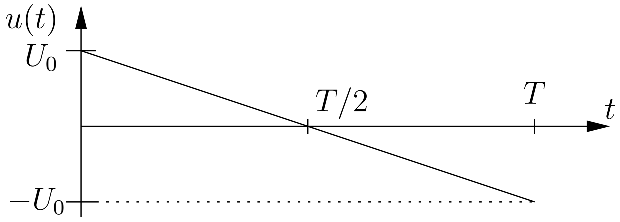
$$\begin{aligned}
\overline{|u(t)|} &= \frac{1}{T}\int_0^T |u|\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/4} \frac{U_0}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{T/4}^{T/2} U_0\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(\frac{U_0}{2}\frac{T}{4} + U_0\frac{T}{4}\right) \\
&= \frac{3}{4}U_0.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{2}{T}\left(\int_0^{T/4} \frac{U_0^2}{4}\,\mathrm{d}t + \int_{T/4}^{T/2} U_0^2\,\mathrm{d}t\right)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{T}\left(\frac{U_0^2}{4}\frac{T}{4} + U_0^2\frac{T}{4}\right)} \\
&= \sqrt{U_0^2(\frac{1}{8} + \frac{1}{2})} = U_0\sqrt{\frac{5}{8}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 17

Eine periodische zeitveränderliche Spannung $u(t)$ mit der Peridendauer T hat den unten skizzierten Verlauf:



a) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert von $u(t)$.

b) Berechnen Sie den Gleichrichtwert $\overline{|u(t)|}$ von $u(t)$.

c) Berechnen Sie den den Effektivwert U_{eff} von $u(t)$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\overline{u} = 0$ durch Kästchenzählen.
b) Wiederum durch "Umklappen" der zweiten Hälfte der Funktion und Kästchenzählen:

$$\overline{|u(t)|} = \frac{U_0}{2}.$$

c)

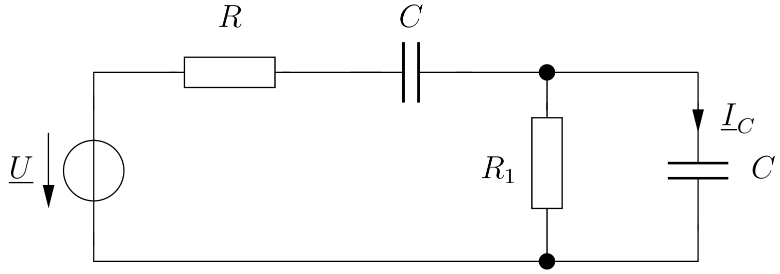
$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T u^2 \,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} (U_0 - 2\frac{t}{T}U_0)^2 \,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} (U_0^2 - 4\frac{t}{T}U_0^2 + 4\frac{t^2}{T^2}U_0^2) \,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{2U_0^2}{T}\int\limits_0^{T/2} (1 - 4\frac{t}{T} + 4\frac{t^2}{T^2}) \,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{2U_0^2}{T}\left[t - 2\frac{t^2}{T} + \frac{4}{3}\frac{t^3}{T^2}\right]_0^{T/2}} \\
&= \sqrt{\frac{2U_0^2}{T}\left(\frac{T}{2} - 2\frac{T^2}{4T} + \frac{4}{3}\frac{T^3}{8T^2}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2U_0^2}{T}\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{2}+\frac{1}{6}T\right)} \\
&= \sqrt{\frac{U_0^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}U_0.
\end{aligned}
$$

1.3 Wechselstrom-Schaltungen

Aufgabe 18

Gegeben ist folgende Schaltung mit dem unbekannten Widerstand R_1:



Die Werte von R und C sind bekannt. Die Spannungsquelle liefert eine sinusförmige Wechselspannung mit dem komplexen Effektivwert $\underline{U}$ und der Kreisfrequenz ω.

Berechnen Sie in Abhängigkeit von R und C den Wert von R_1, bei dem der Strom $\underline{I}_C$ der Spannung $\underline{U}$ um $\pi/2$ voreilt.

Lösung zu Aufgabe 18

Ansatz über das ohmsche Gesetz:

$$\underline{U} = \underline{I}_1(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}) + \underline{I}_C \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{1.8}$$

und einen Maschenumlauf:

$$(\underline{I}_1 - \underline{I}_C)R_1 = \underline{I}_C \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{1.9}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_C(1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C R_1}) \tag{1.10}$$

Einsetzen in erste Gleichung:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}_C} = \underbrace{(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})(1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C R_1})}_{=0} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}, \tag{1.11}$$

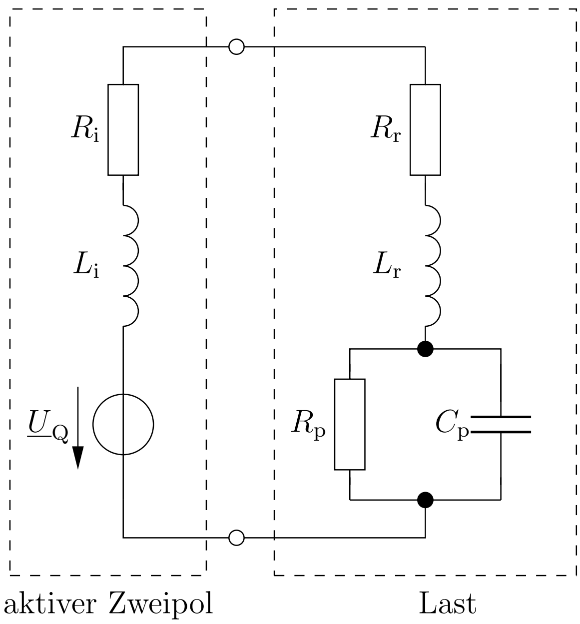
da die geforderte Bedingung erfüllt wird, wenn der unterklammerte Ausdruck Null wird. Lösung:

$$R_1 = \frac{1}{\omega^2 C^2 R}.$$

Alternativer Lösungsansatz über die Forderung, dass $\underline{U}$ und $\underline{U}_C$ in Phase sein müssen, führt auf dassselbe Ergebnis.

Aufgabe 19

Gegeben ist ein aktiver Zweipol aus einer idealen Wechselspannungsquelle mit dem komplexen Effektivwert $\underline{U}_\mathrm{Q}$ und der Frequenz f, einer unbekannten Induktivität L_i und einem unbekannten Widerstand R_i. An diesen Zweipol ist eine Last aus bekannten Bauelementen $R_\mathrm{r}, L_\mathrm{r}, R_\mathrm{p}$ und C_p angeschlossen.



a) Bestimmen Sie den komplexen Innenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{i}$ des aktiven Zweipols in Abhängigkeit von R_i und L_i.

b) Bestimmen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}_\mathrm{Last}$ der Last.

c) Berechnen Sie die Werte von R_i und L_i in Abhängigkeit von den bekannten Bauelementen und der Frequenz für den Fall, dass gilt: $\underline{Z}_\mathrm{i} = \underline{Z}^*_\mathrm{Last}$ (Leistungsanpassung).

Lösung zu Aufgabe 19

a)

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{i},$$

b)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_\mathrm{Last} &= R_\mathrm{r} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{r} + R_\mathrm{p}||C_\mathrm{p} \\
&= R_\mathrm{r} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{r} + \frac{1}{1/R_\mathrm{p} + \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p}} = R_\mathrm{r} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{r} + \frac{1/R_\mathrm{p} - \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} \\
&= R_\mathrm{r} + \frac{1/R_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} - \mathrm{j}\left(\frac{\omega C_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} - \omega L_\mathrm{r}\right)
\end{aligned}$$

c) Für Leistungsanpassung gilt: $\underline{Z}_\mathrm{i} = \underline{Z}^*_\mathrm{Last}$.

$$\Rightarrow \underline{Z}^*_\mathrm{Last} = R_\mathrm{r} + \frac{1/R_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} + \mathrm{j}\left(\frac{\omega C_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} - \omega L_\mathrm{r}\right)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

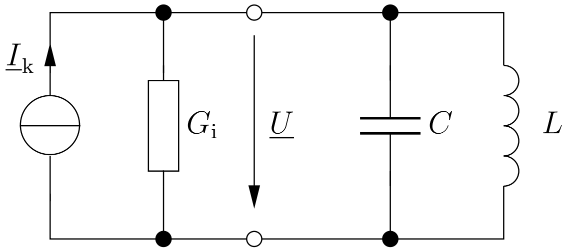
$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{r} + \frac{1/R_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2}$$

und

$$L_\mathrm{i} = \left(\frac{C_\mathrm{p}}{1/R_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} - L_\mathrm{r} \right) .$$

Aufgabe 20

Die Parallelschaltung einer Spule mit der Induktivität L und eines Kondensators mit der Kapazität C wird von einer realen Wechselstromquelle (Kurzschlussstrom I_k, Innenleitwert G_i) mit variabler Frequenz gespeist.



a) Bestimmen Sie die Frequenz, bei der die Spannung $\underline{U}$ ihren maximalen Wert U_max annimmt.

b) Bestimmen Sie U_max.

c) Bestimmen Sie die Frequenzen, bei denen die Spannung an den Klemmen auf $1/\sqrt{2}$ des Maximalwertes sinkt.

d) Bestimmen Sie die Frequenzen, bei denen der Absolutwert $|\varphi|$ der Phasenverschiebung zwischen $\underline{U}$ und $\underline{I}$ den Wert $\pi/4$ annimmt.

Lösung zu Aufgabe 20

a + b) Maximale Spannung liegt am Ausgang dann an, wenn der Parallelschwingkreis bei seiner Resonanzfrequenz bestrieben wird. In diesem Fall wird der Leitwert des Parallelschwingkreises Null und man erhält für

$$\underline{U} = \underline{I}_\mathrm{k}/G_\mathrm{i};$$

dies ist für

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

der Fall.

c) Die Spannung fällt auf das $1/\sqrt{2}$-fache des Maximalwertes ab, wenn für den gesamten Lastwiderstands ($G_\mathrm{i}||L||C$) gilt: Betrag des Imaginärteils gleich Betrag des Realteils.

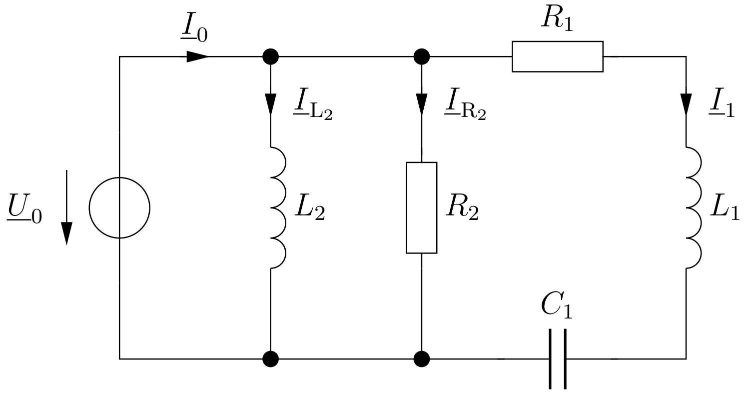
$$\begin{aligned} |\omega C - \frac{1}{\omega L}| &= G_\mathrm{i} \\ \omega^2 - \frac{1}{LC} &= \pm\omega G_\mathrm{i}/C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \pm\frac{G_\mathrm{i}}{2C} + \sqrt{(\frac{G_\mathrm{i}}{2C})^2 + \frac{1}{LC}}$$

d) Für einen Phasenwinkel von $\pi/4$ zwischen $\underline{U}$ und $\underline{I}$ müssen die Beträge von Imaginär- und Realteil des Lastwiderstandes gleich sein (gleiche Bedingung wie unter b) und damit gleiches Ergebnis).

Aufgabe 21

Gegeben ist das nachfolgend dargestellte Netzwerk.



In diesem Netzwerk ist der Strom $\underline{I}_1$ bekannt.:

$$\underline{I}_1 = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}.$$

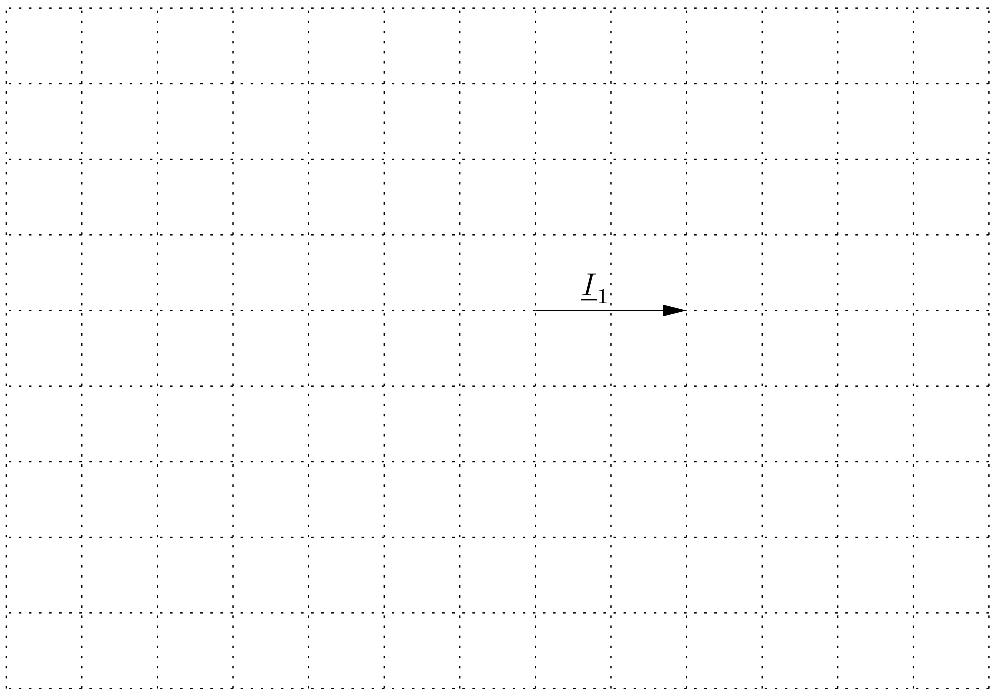
Weiterhin gilt mit der Kreisfrequenz ω der Spannungsquelle:

$$\frac{1}{\omega C_1} = 5\,\Omega\,, \quad \omega L_1 = 10\,\Omega \quad , \quad R_1 = 5\,\Omega,$$

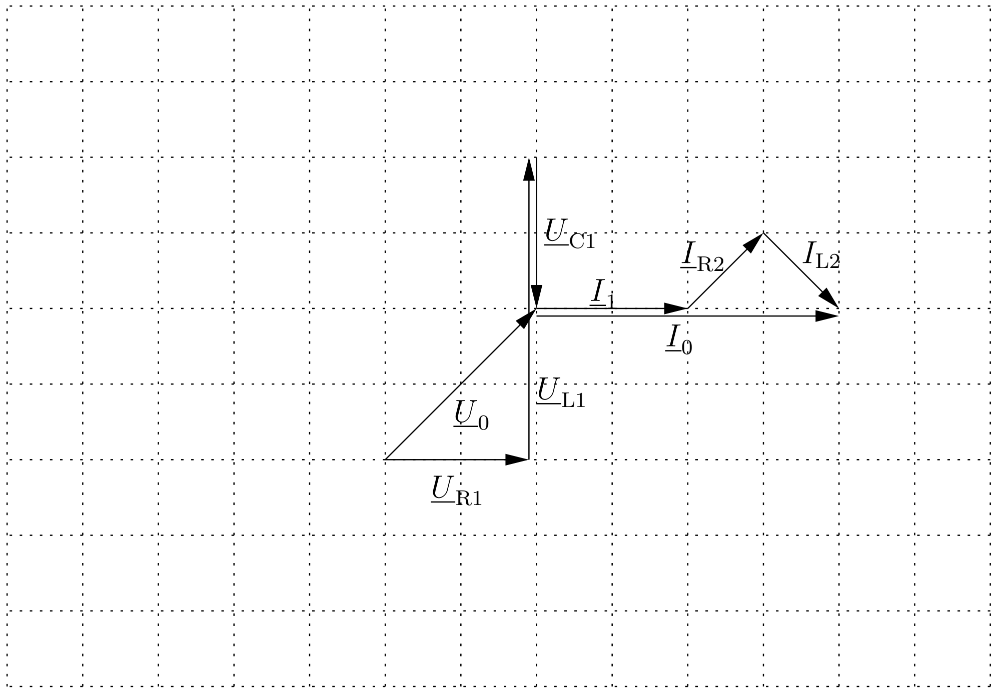
$$R_2 = 10\,\Omega, \,, \quad \omega L_2 = 10\,\Omega.$$

a) Zeichnen Sie für diese Schaltung ein vollständiges Zeigerdiagramm in das Beiblatt ein. (Maßstab: $1\,\mathrm{A} \triangleq 2\mathrm{cm}$; $5\,\mathrm{V} \triangleq 2\mathrm{cm}$)

b) Geben Sie den Betrag und die Phase aller Ströme und Spannungen an den Bauelementen und der Quelle mit Hilfe des Zeigerdiagrammes auf eine Nachkommastelle genau an.


$\underline{I}_1$

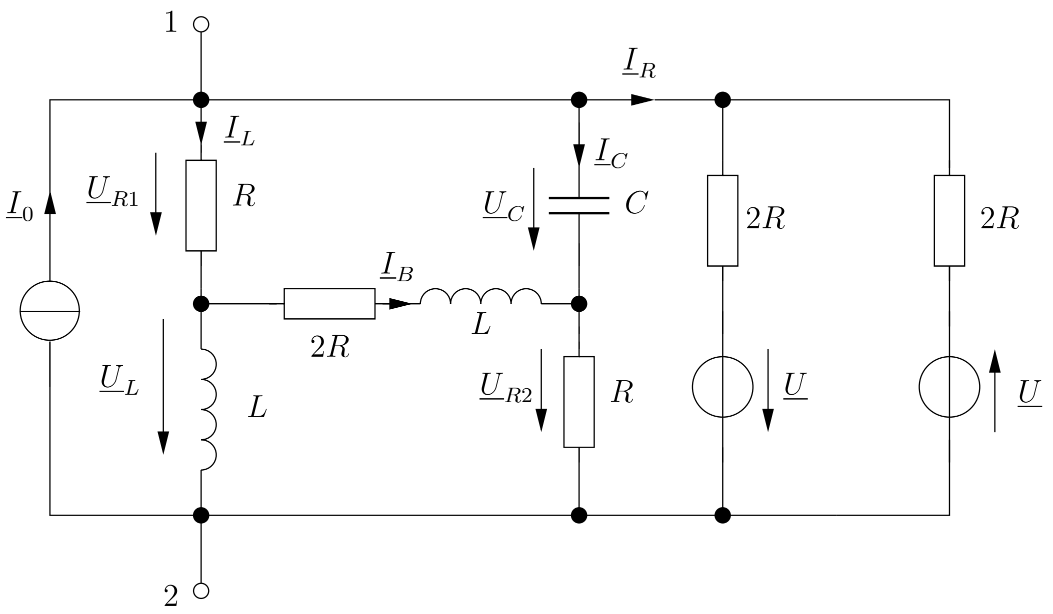
Lösung zu Aufgabe 21



$$
\begin{aligned}
\underline{U}_{C_1} &= 5\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}\,,\\
\underline{U}_{L_1} &= 10\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}\,,\\
\underline{U}_{R_1} &= 5\,\mathrm{V}\,,\\
\underline{I}_{R_2} &\backsimeq 0.7\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}\,,\\
\underline{I}_{L_2} &\backsimeq 0.7\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}45^\circ}\,,\\
\underline{I}_0 &= 2\,\mathrm{A}\,,\\
\underline{U}_0 &= 5\sqrt{2}\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}\,,
\end{aligned}
$$

Aufgabe 22

Gegeben ist skizzierte Schaltung mit harmonischen Quellen. Es gilt: $\omega L = \frac{1}{\omega C} = R$.



a) Berechnen Sie $\underline{I}_B$.

b) Zeichnen Sie ein Zeigerbild, welches folgende Größen enthält: $\underline{I}_0$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_C$, $\underline{I}_R$, $\underline{U}_{R1}$, $\underline{U}_L$, $\underline{U}_C$, $\underline{U}_{R2}$, $\underline{U}_{12}$.

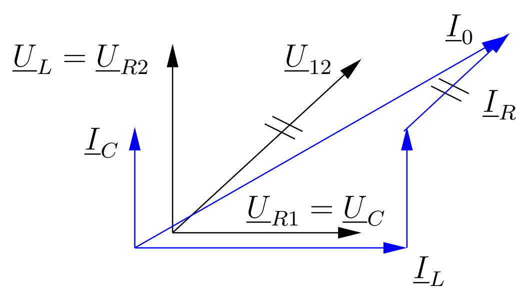
c) Bestimmen Sie die äquivalente Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen 1 und 2 und geben Sie deren charakteristische Größen an!

Lösung zu Aufgabe 22

a) $\underline{I}_B = 0$, weil Brücke abgeglichen

$$\frac{R}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1/\,\mathrm{j}\omega C}{R} \Longrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}} = \frac{1}{\mathrm{j}}, \quad R = \omega L = 1/\omega C$$

b) Zeigerbild



c) Lösung über Quellenumwandlung wobei folgende Vereinfachungen gelten

- $2R + \mathrm{j}\omega L$ fällt weg wegen a)
- die Ströme der beiden Spg.-quellen heben sich auf

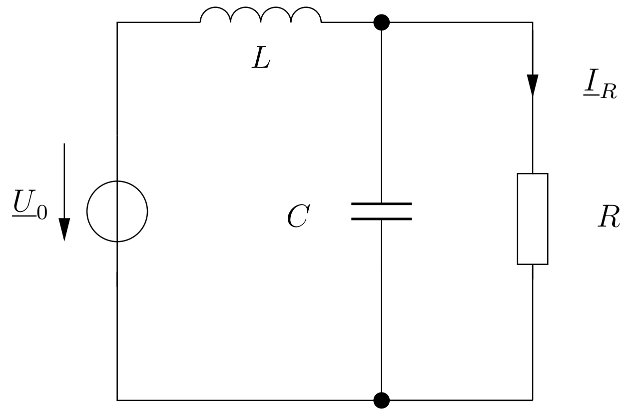
somit bleibt nur noch die Stromquelle und die Widerstände, welche sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} 2R||2R &= R \\ (R+\mathrm{j}\omega L)||(R+1/\mathrm{j}\omega C) &= \frac{(R+\mathrm{j}R)\cdot(R-\mathrm{j}R)}{2R} = R \\ R_\mathrm{i} &= R||R = R/2 \end{aligned}$$

damit ergibt sich nach erneuter Quellenumwandlung die Ersatzspannungsquelle zu $\underline{U}_0 = \underline{I}_0 \cdot R/2$, $R_\mathrm{i} = R/2$

Aufgabe 23

In der folgenden Schaltung sind die Werte von $\underline{U}_0$, C und R bekannt:



a) Für eine Frequenz $\omega = \omega_1$ eilt die Spannung $\underline{U}_0$ dem Strom $\underline{I}_R$ um $\pi/2$ voraus. Bestimmen Sie für diesen Fall den Wert von L als Funktion aus ω_1, C und R.

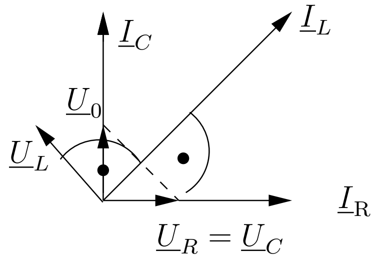
b) Zeichnen Sie ein vollständiges Zeigerbild der Schaltung mit sämtlichen Strömen und Spannungen für den Fall aus a).

Lösung zu Aufgabe 23

a)

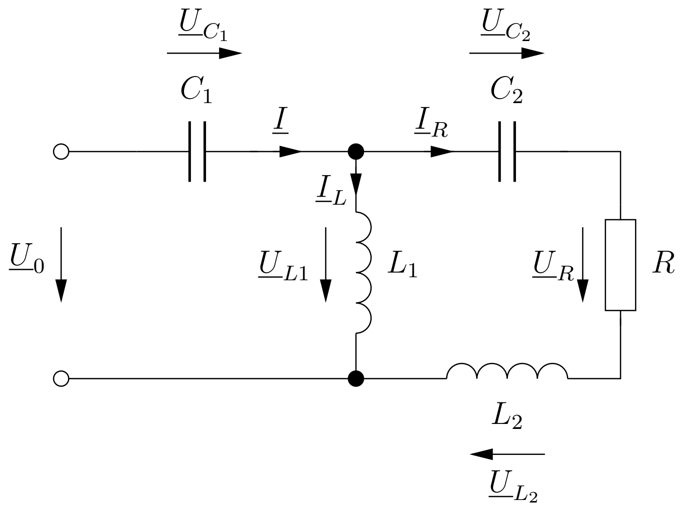
$$
\begin{aligned}
\measuredangle(\underline{U}_0, \underline{I}_R) &= 90^\circ \quad \longleftrightarrow \quad \underline{I}_R = -\mathrm{j} \cdot k \cdot \underline{U}_0 \qquad | \text{ k beliebig} \\
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{R} \\
&= \frac{\underline{U}_0}{R}\left(\frac{\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega_1 CR}}{\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega_1 CR} + \mathrm{j}\omega_1 L}\right) \quad = \quad \frac{\underline{U}_0}{R + (1+\mathrm{j}\omega_1 CR)(\mathrm{j}\omega_1 L)} \\
&= \frac{\underline{U}_0}{R + \mathrm{j}\omega_1 L - \omega_1^2 CRL} \\
&= \frac{\underline{U}_0}{\underbrace{(R - \omega_1^2 CRL)}_{=0} + \mathrm{j}\omega_1 L} \\
\Longleftrightarrow R &= \omega_1^2 CRL \quad \longrightarrow \quad L = \frac{R}{\omega_1^2 CR}
\end{aligned}
$$

b) Zeigerbild:


$\underline{I}_C$
$\underline{I}_L$
$\underline{U}_0$
$\underline{U}_L$
$\underline{I}_\mathrm{R}$
$\underline{U}_R = \underline{U}_C$

Aufgabe 24

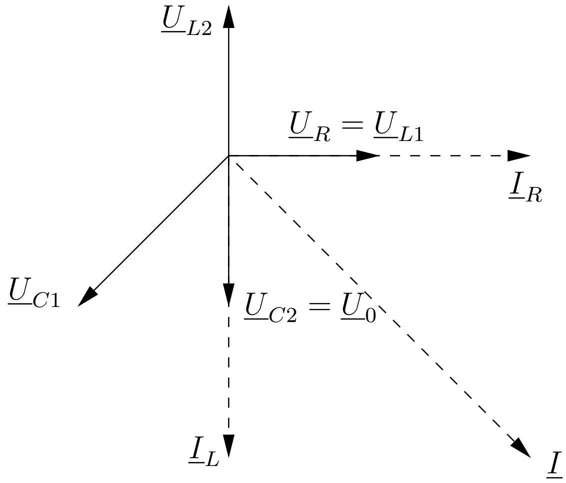
Gegeben ist die folgende Schaltung, die von einer Wechselspannung $\underline{U}_0$ mit bekannter Kreisfrequenz ω gespeist wird.



Es gilt: $\omega L_1 = \omega L_2 = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = R = 1\,\Omega, \quad \underline{I}_R = 1\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}$.

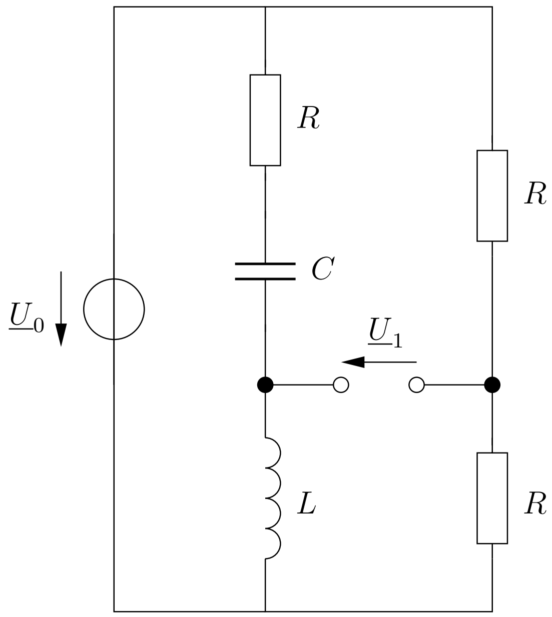
Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerbild dieser Schaltung, welches alle Spannungen und Ströme enthält. Maßstab: 1 A $\hat{=}$ 4cm, 1 V $\hat{=}$ 2cm.

Lösung zu Aufgabe 24



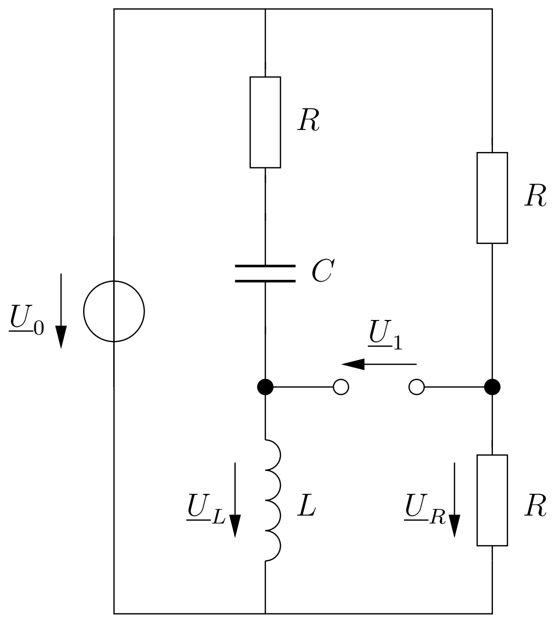
Aufgabe 25

Die unten skizzierte Schaltung mit gegebenen Werten für L und C wird von einer Sinusspannungsquelle mit Leerlaufspannung $\underline{U}_0$ und der Kreisfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ gespeist. Die Spannung $\underline{U}_0$ eilt bei dieser Kreisfrequenz der Spannung $\underline{U}_1$ um 45° vor.



Berechnen Sie R in Abhängigkeit von L und C.

Lösung zu Aufgabe 25



Ansatz:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_R - \underline{U}_L$$

und (Spannungsteiler):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 \frac{R}{2R} - \underline{U}_0 \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L + 1/(\mathrm{j}\omega C)},$$

damit wird:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}(\omega L - 1/(\omega C))} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}\omega^2 LC}{\omega RC + \mathrm{j}(\omega^2 LC - 1))}$$

Bei der gegebenen Frequenz wird aus dem Ausdruck

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{\omega RC + \mathrm{j}(1-1))} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

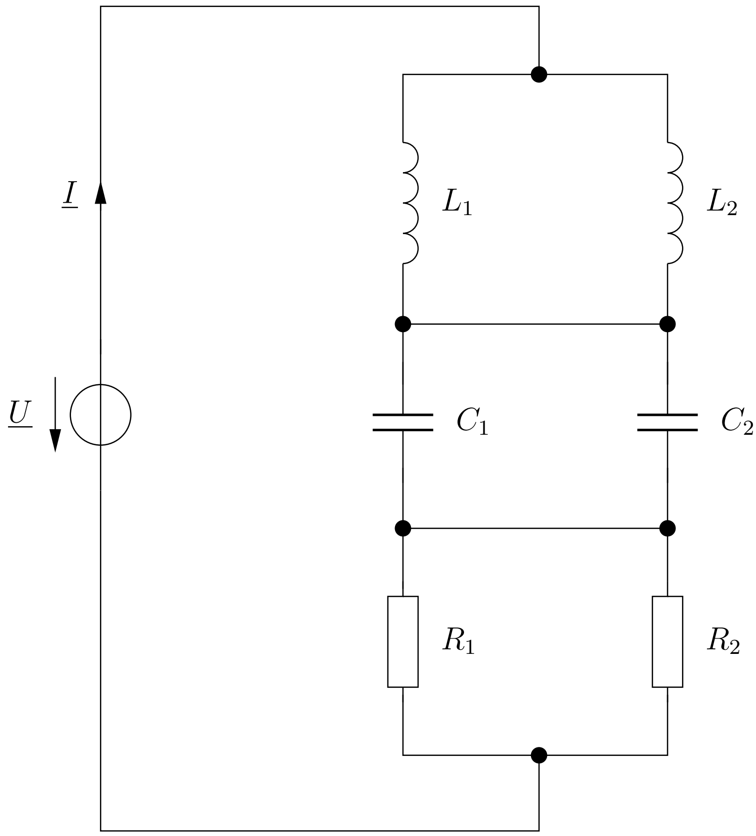
Es muss gelten:

$$\arg(\underline{U}_1/\underline{U}_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}45^\circ} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\{\underline{U}_1/\underline{U}_0\} = -\mathrm{Im}\,\{\underline{U}_1/\underline{U}_0\}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Aufgabe 26

Eine ideale Sinusspannungsquelle mit dem komplexen Effektivwert $\underline{U}$ und der Kreisfrequenz ω speist das abgebildete Netzwerk, das aus den Induktivitäten L_1 und L_2, den Kapazitäten C_1 und C_2 und den ohmschen Widerständen R_1 und R_2 besteht.



a) Bei welcher Kreisfrequenz / welchen Kreisfrequenzen wird der Strom $\underline{I}$ *minimal*? Wie groß ist $\underline{I}$ in diesem Fall / in diesen Fällen?

b) Bei welcher Kreisfrequenz / welchen Kreisfrequenzen wird der Strom $\underline{I}$ *maximal*? Wie groß ist $\underline{I}$ in diesem Fall / in diesen Fällen?

c) Berechnen Sie $\underline{I}(\omega)$.

Hinweis: Überlegen Sie, ob Sie die Schaltung vereinfachen können.

Lösung zu Aufgabe 26

a) Bei $\omega = 0$ sperren die Kondensatoren, bei $\omega \to \infty$ sperren die Spulen.
Folglich gilt:

$$\underline{I}(\omega = 0) = \underline{I}(\omega \to \infty) = 0$$

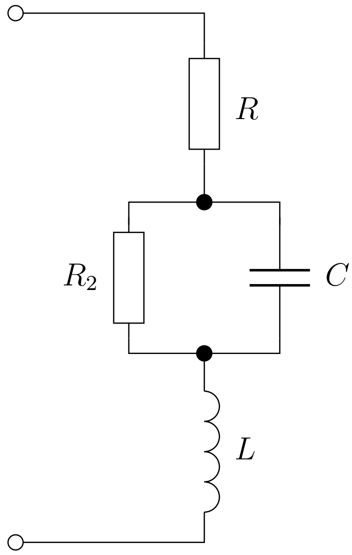
b) Bei Resonanz ist der Strom maximal.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}(C_1 + C_2)}}, \qquad \underline{I}(\omega_0) = \frac{\underline{U}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

c) $\underline{Z} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + \mathrm{j}\left(\omega \frac{L_1 L_2}{L_1+L_2} - \frac{1}{\omega(C_1+C_2)}\right)$.
$\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}$

Aufgabe 27

Gegeben ist der folgende Schwingkreis:



a) Bestimmen Sie Resonanzfrequenz des Schwingkreises in Abhängigkeit von den bekannten Größen.

b) Bestimmen Sie: $\lim_{R_2\to\infty}\omega_0$:

c) Berechnen Sie die Impedanz des Schwingkreises bei Resonanz.

Lösung zu Aufgabe 27

a) Schrittweise Berechnung der Gesamtimpedanz des Schwingkreises:

$$\underline{Y}_C := \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R_2} = \frac{1+\mathrm{j}\omega C R_2}{R_2}$$

Gesamtimpedanz:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \mathrm{j}\omega L + R + \frac{1}{\underline{Y}_C} = \mathrm{j}\omega L + R + \frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega C R_2} = \mathrm{j}\omega L + R + \frac{R_2(1-\mathrm{j}\omega C R_2)}{1+(\omega C R_2)^2}$$

Bei Resonanz wird der Imaginärteil von $\underline{Z}_{\text{ges}}$ Null:

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_{\text{ges}}\} = \omega_0 L - \frac{\omega_0 C R_2^2}{1+(\omega_0 C R_2)^2} = 0,$$

also:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \omega_0 L(1+(\omega_0 C R_2)^2) - \omega_0 C R_2^2 &= 0\\
\Leftrightarrow \omega_0 L + \omega_0^3 L(CR_2)^2 - \omega_0 C R_2^2 &= 0, \quad \text{da} \quad \omega_0 \neq 0\\
\Leftrightarrow L + \omega_0^2 L(CR_2)^2 - C R_2^2 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\omega_0^2 = \frac{CR_2^2 - L}{L(CR_2)^2} \quad \text{Ergebniskosmetik}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 - L/(CR_2^2)}{LC}}$$

b) Vergleich mit der Resonanzfrequenz des idealen Reihenschwingkreises:

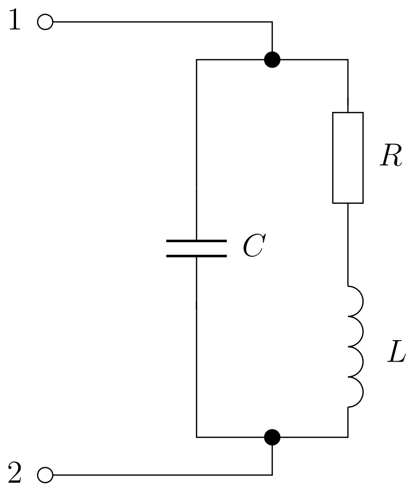
$$\lim_{R_2 \to \infty} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Stimmt.
c)

$$\underline{Z}_{\text{ges}}(\omega_0) = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_{\text{ges}}\} = R + \frac{R_2}{1 + (\omega_0 C R_2)^2}$$

Aufgabe 28

Gegeben ist der unten skizzierte reale Schwingkreis mit bekannten Größen R, L und C:



a) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_0 des Schwingkreises.

b) Der Schwingkreis soll näherungsweise durch einen Parallelschwingkreis, d.h. eine Parallelschaltung von drei Elementen R', L' und C' ersetzt werden. Die Resonanzfrequenz der Schaltung soll sich nicht ändern. Berechnen Sie die den Wert des Widerstands R'.

Hinweis zu b): Wandeln Sie die Reihenschaltung aus R und L in eine für $\omega = \omega_0$ äquivalente Parallelschaltung um.

Lösung zu Aufgabe 28

a) Die Berechnung der Resonanzfrequenz geschieht vorteilhaft über die Berechnung der Admittanz:

$$\underline{Y}_{12} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\omega C + \frac{R - \mathrm{j}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Bedingung für Resonanz: $\mathrm{Im}\left\{\underline{Y}_{12}\right\} = 0$,

$$\Leftrightarrow \omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0.$$

Auflösen nach ω_0:

$$\begin{aligned} (\omega_0 L)^2 &= \frac{L}{C} - R^2, \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2, \\ f_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}. \end{aligned}$$

b) Serien-Parallel-Wandlung für die Reihenschaltung aus L und R. Für den Leitwert der Reihenschaltung aus den gegebenen Elementen erhält man:

$$\underline{Y}_{\text{Reihe}} = \frac{R - \mathrm{j}\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Der Leitwert der äquivalenten Parallelschaltung ergibt:

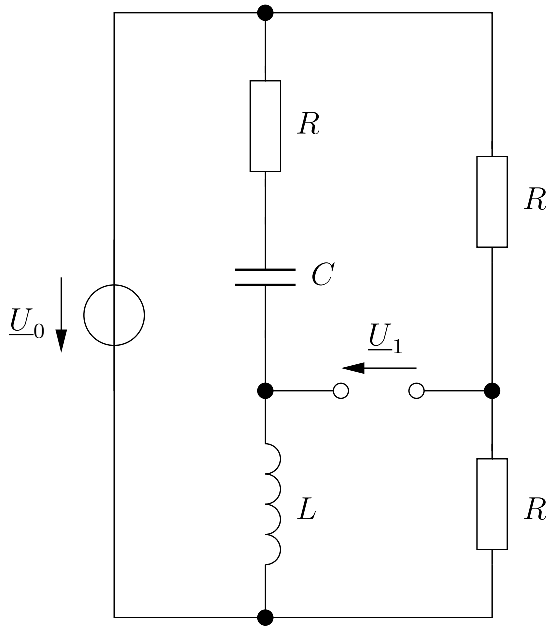
$$\underline{Y}_{\text{Parallel}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L'}.$$

Gleichsetzen der beiden Realteile für die feste Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2}, \\ R' &= R + \frac{(\omega_0 L)^2}{R}. \end{aligned}$$

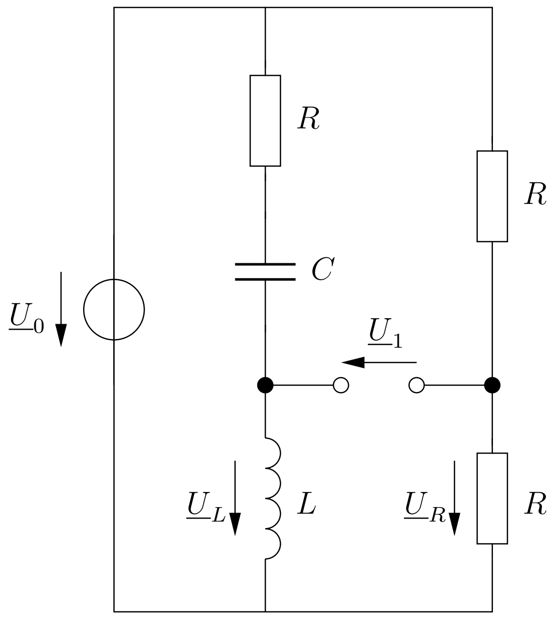
Aufgabe 29

Die unten skizzierte Schaltung mit gegebenen Werten für L und C wird von einer Sinusspannungsquelle $\underline{U}_0$ bei der Kreisfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ gespeist. Die Spannung $\underline{U}_0$ eilt bei dieser Kreisfrequenz der Spannung $\underline{U}_1$ um 45° voraus.



Berechnen Sie R in Abhängigkeit von L und C.

Lösung zu Aufgabe 29



Ansatz:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_R - \underline{U}_L$$

und (Spannungsteiler):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 \frac{R}{2R} - \underline{U}_0 \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L + 1/(\mathrm{j}\omega C)},$$

damit wird:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}(\omega L - 1/(\omega C))} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}\omega^2 LC}{\omega RC + \mathrm{j}(\omega^2 LC - 1))}$$

Bei der gegebenen Frequenz wird aus dem Ausdruck

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{\omega RC + \mathrm{j}(1-1))} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Es muss gelten:

$$\arg(\underline{U}_1/\underline{U}_0) = -45^\circ \Rightarrow \mathrm{Re}\,\{\underline{U}_1/\underline{U}_0\} = -\mathrm{Im}\,\{\underline{U}_1/\underline{U}_0\}$$

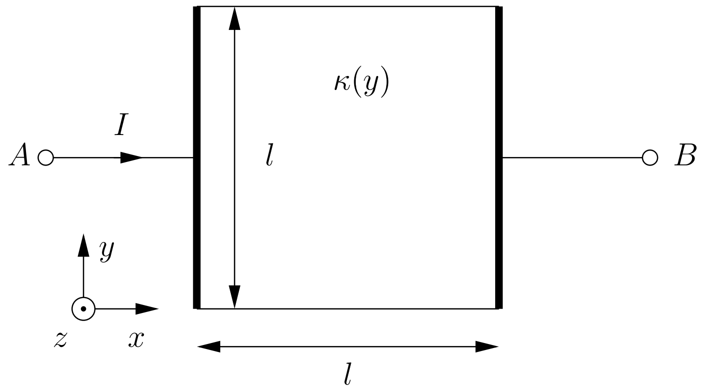
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

2 Musterlösungen GET B

2.1 Elektrisches Strömungsfeld

Aufgabe 30

Zwischen zwei quadratischen Metallplatten befindet sich ein würfelförmiges Leitermaterial mit der ortsabhängigen Leitfähigkeit $\kappa = \kappa_0(1 - y/l)$.
Die Größen l und κ_0 sind bekannt.



An die Klemmen A und B wird nun die Spannung U_{AB} angelegt. Bestimmen Sie

a) die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im Leitermaterial,

b) die Stromdichte $\vec{J}$ im Leitermaterial,

c) den Strom I,

d) die Energie W, die innerhalb der Zeitspanne Δt in Wärme umgewandelt wird.

Lösung zu Aufgabe 30

a)

$$U_{\mathrm{AB}} = \int\limits_{x=0}^{l} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{s} \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{AB}} = \int\limits_{x=0}^{l} E \cdot \mathrm{d}s$$

$$E = \text{ konst entlang des Integrationsweges} \quad \Rightarrow \quad U_{\mathrm{AB}} = E \int\limits_{x=0}^{l} \mathrm{d}s = El$$
$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{l}\,\vec{e_x}$$

b)

$$\vec{J}(y) = \kappa\vec{E} = \kappa_0(1 - y/l)\frac{U_{\mathrm{AB}}}{l}\,\vec{e_x}$$

c)

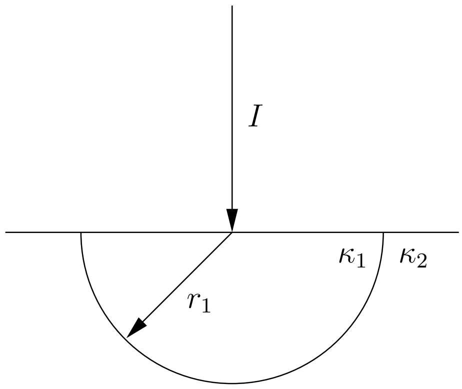
$$\begin{aligned}
I &= \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \\
&= \int\limits_{z=0}^{l} \int\limits_{y=0}^{l} \vec{J}(y) \cdot \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z\,\vec{e_x} \\
&= l\kappa_0 \frac{U_{\mathrm{AB}}}{l} \int\limits_{y=0}^{l} (1 - y/l)\ \mathrm{d}y \\
&= \kappa_0 U_{\mathrm{AB}} \left[y - \frac{y^2}{2l} \right]_0^l \\
&= \kappa_0 U_{\mathrm{AB}} \left(l - \frac{l}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\kappa_0 U_{\mathrm{AB}} l.
\end{aligned}$$

d)

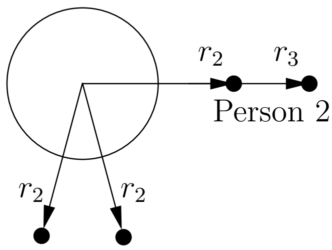
$$\begin{aligned}
P &= U_{\mathrm{AB}} \cdot I \\
W &= P \cdot \varDelta t \\
&= \frac{1}{2}\kappa_0 U_{\mathrm{AB}}^2 l \cdot \varDelta t.
\end{aligned}$$

Aufgabe 31

Ein Halbkugelerder mit den Radius r_1 besteht aus sehr gut leitfähigem Material ($\kappa_1 \gg \kappa_2$). Er ist mit einem Blitzableiter verbunden, der für Stromstärken bis zu $I = I_{\text{Blitz}}$ ausgelegt ist. Die Luft ist nichtleitend, die Leitfähigkeit des umgebenden Erdreichs beträgt κ_2.



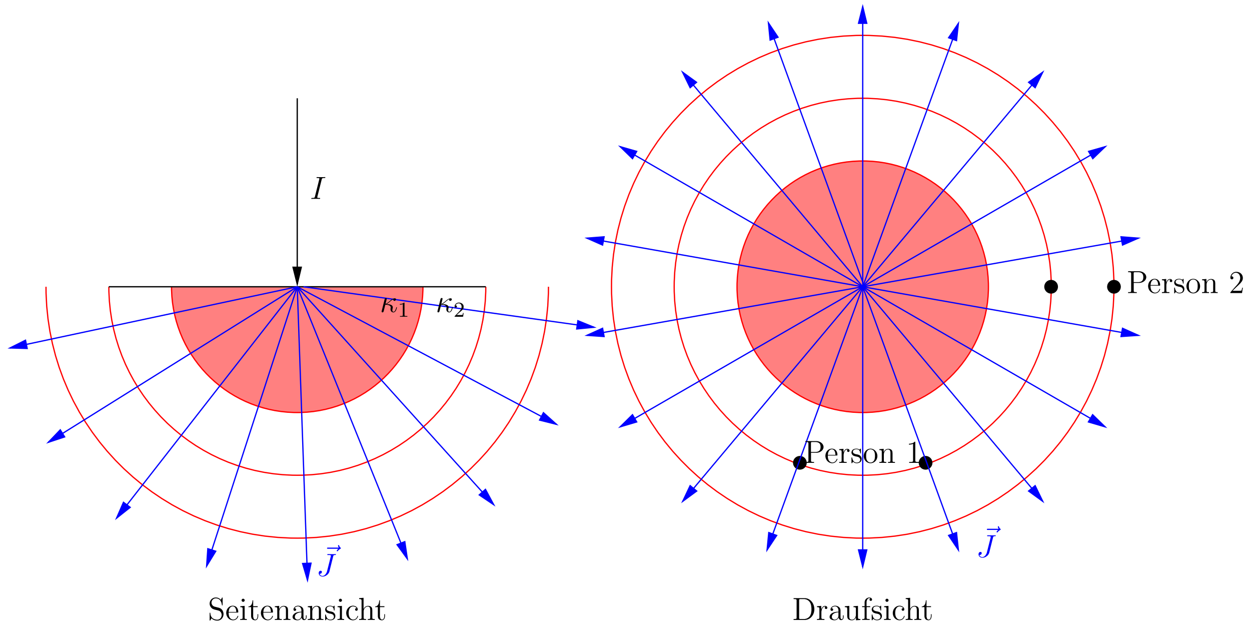
In der Nähe des Erders befinden sich zwei Personen. Die Füße von Person eins befinden sich im Abstand von r_2 vom Mittelpunkt des Erders; der linke Fuß von Person zwei befindet sich im Abstand r_2, der rechte im Abstand r_3 jeweils vom Mittelpunkt der Erders.



a) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien und die Äquipotentialflächen des sich ausbildenden elektrischen Strömungsfeldes.

b) Berechnen Sie die für die beiden Personen auftretenden Schrittspannungen in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.

Lösung zu Aufgabe 31



Im Erdreich bildet sich ein radiales Strömungsfeld aus mit:

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r^2}\,\vec{e}_r.$$

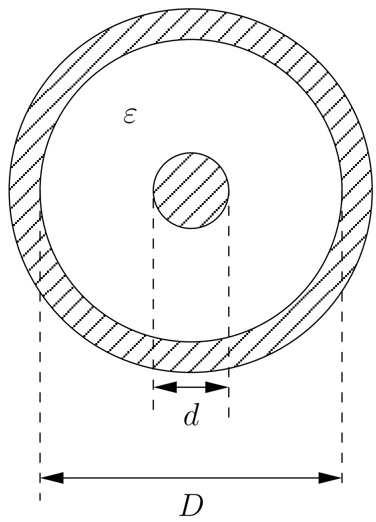
In einem solchen Feld sind die Äquipotentialflächen konzentrische Kugelflächen um den Ursprung. Daher beträgt die Schrittspannung für Person 1 in jedem Fall 0 V (unabhängig von Stromstärke und Abstand).
Für Person 2 muss die Schrittspannung berechnet werden:

$$U_{23} = \int\limits_{r_2}^{r_3} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{r_2}^{r_3} E(r)\ \mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\kappa_2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right).$$

2.2 Elektrostatik

Aufgabe 32

Ein Koaxialkabel mit der Länge l und dem skizzierten Querschnitt ist mit einem Dielektrikum mit der Permittivität ε gefüllt. Zwischen Innen- und Außenleiter wird die Spannung U angelegt.



a) Berechnen Sie die Ladung Q, die sich auf dem Innenleiter befindet.

b) Berechnen Sie die ortsabhängige elektrische Feldstärke im Dielektrikum.

c) Berechnen Sie die Kapazität des Kabels.

Lösung zu Aufgabe 32

Aus Symmetriegründen gilt: $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$, $\vec{D} = D(\rho)\vec{e}_\rho$. Man erhält aus dem Satz vom elektrischen Hüllenfluss:

$$\begin{aligned}
\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} &= Q \\
\vec{D} \parallel \mathrm{d}\vec{A} \Rightarrow \oint D \cdot \mathrm{d}A &= Q \\
\text{Feldlinien nur radial } \Rightarrow \int\limits_{\text{Zylindermantel}} D \cdot \mathrm{d}A &= Q \\
2\pi\rho l D(\rho) &= Q \\
\Rightarrow D &= \frac{Q}{2\pi l \rho}. \\
\text{bzw. } \vec{E} &= \frac{Q}{2\pi l \varepsilon \rho}\,\vec{e}_\rho.
\end{aligned}$$

Zu bestimmen ist noch der Zusammenhang zwischen Spannung und Ladung:

$$U = \int\limits_{\text{Innenleiter}}^{\text{Aussenleiter}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{d/2}^{D/2} E \, \mathrm{d}\rho = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon} \ln(D/d).$$

a)

$$Q = \frac{2\pi l \varepsilon U}{\ln(D/d)}.$$

b)

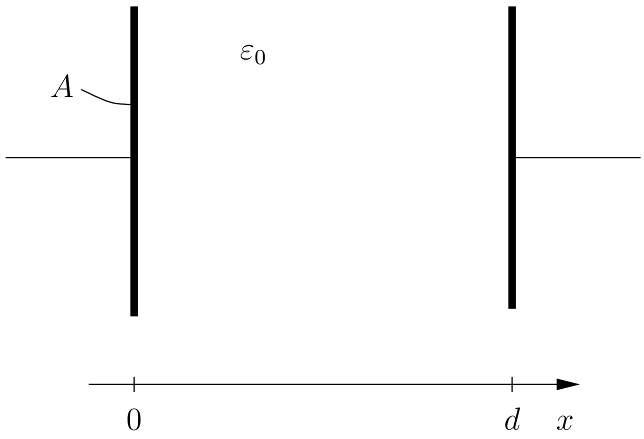
$$\vec{E} = \frac{U}{\ln(D/d)} \frac{1}{\rho} \, \vec{e}_\rho,$$

c)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l \varepsilon}{\ln(D/d)}.$$

Aufgabe 33

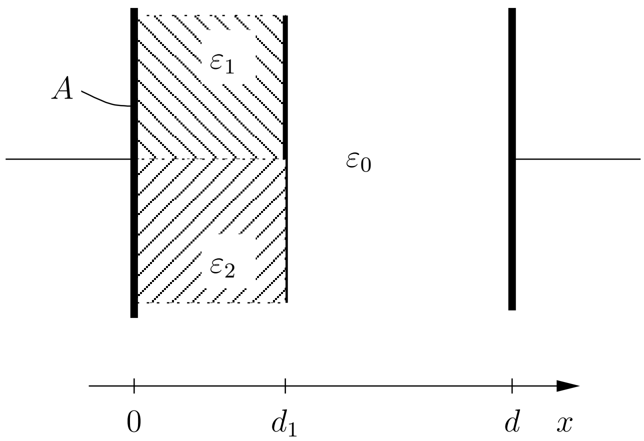
Gegeben ist ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche A, der durch kurzzeitiges Verbinden mit einer Spannungsquelle auf die Spannung U_1 aufgeladen wird, siehe Skizze.



a) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im Inneren des Plattenkondensators.

b) Bestimmen Sie die Kapazität C des Kondensators.

Nach dem Trennen von der Spannungsquelle wird der Bereich $0 \leq x \leq d_1$ je zur Hälfte mit zwei Dielektrika aufgefüllt, die die Permittivität ε_1 bzw. ε_2 besitzen. Bei $x = d_1$ wird eine Metallfolie mit vernachlässigbarer Dicke angebracht.



c) Bestimmen Sie die Kapazität C' des geänderten Kondensators.

d) Welche Spannung U' stellt sich zwischen den Kondensatorplatten ein?

Lösung zu Aufgabe 33

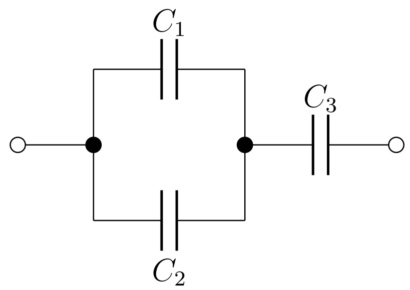
a)

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{x=0}^{d} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\ \vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{s} \Rightarrow \quad U_1 &= \int_{x=0}^{d} E \cdot \mathrm{d}s \\ E = \text{konst entlang des Integrationswegs} \Rightarrow \quad U_1 &= E \int_{x=0}^{d} \mathrm{d}s = E \cdot d \\ \Rightarrow \quad \vec{E} &= \frac{U_1}{d} \vec{e}_x \end{aligned}$$

b)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 E \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$$

c) Die Anordnung kann als Ersatzschaltung aus drei Kondensatoren dargestellt werden:



$$\begin{aligned} \text{mit} \quad C_1 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \cdot A}{2d_1} = \frac{d}{2d_1} \varepsilon_{r1} C \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \cdot A}{2d_1} = \frac{d}{2d_1} \varepsilon_{r2} C \\ C_3 &= \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d - d_1} = \frac{d}{d - d_1} C \\ \Rightarrow C' &= \frac{(C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned}$$

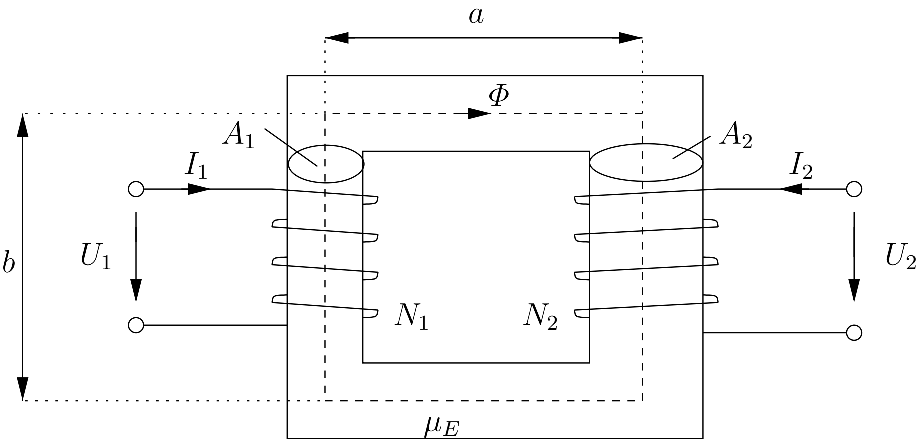
d)

$$U_2 = \frac{C \cdot U_1}{C'}$$

2.3 Magnetisches Feld

Aufgabe 34

Gegeben ist der skizzierte magnetische Eisenkreis mit 2 Wicklungen mit den Wicklungszahlen N_1 und N_2. Der Eisenkreis besitzt die Permeabilität μ_E und weist im rechten Schenkel eine größere Querschnittsfläche $A_2 = 2 \cdot A_1$ auf. Der Eisenkreis ist streuungsfrei und die gesamte Anordnung verlustlos.



Berechnen Sie in Abhängigkeit von den Strömen I_1 und I_2:

a) den magnetischen Fluß Φ,

b) die Energie, die im Eisenkreis gespeichert wird.

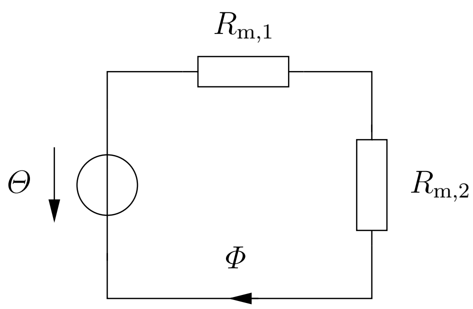
Eine ideale Gleichpannungsquelle U_1 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ an das erste Tor angeschlossen. Das zweite Tor bleibt offen, d.h. $I_2 = 0$. Berechnen Sie für diese Situation:

c) den magnetischen Fluß Φ innerhalb des Eisenkreises,

d) die Spannung U_2.

Lösung zu Aufgabe 34

a) Aufstellen eines elektrischen Ersatzschaltbildes:



$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{m},1} &= \frac{2\cdot a+b}{\mu\cdot A_1}\,,\\
R_{\mathrm{m},2} &= \frac{b/2}{\mu\cdot A_1}\,,\\
\Theta &= N_1\cdot I_1+N_2\cdot I_2\,,\\
\Phi &= \frac{\Theta}{R_{\mathrm{m},1}+R_{\mathrm{m},2}} = \left(\frac{2a+1{,}5b}{\mu\cdot A_1}\right)^{-1}\cdot(N_1\cdot I_1+N_2\cdot I_2)\;.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
W &= \frac{B_1\cdot H_1}{2}\cdot V_1+\frac{B_2\cdot H_2}{2}\cdot V_2\,,\qquad (V_1,V_2:\ \text{Volumen der Teilst.})\\
&= \frac{\Phi^2}{2\cdot\mu\cdot A_1^2}\cdot V_1+\frac{\Phi^2}{2\cdot\mu\cdot A_2^2}\cdot V_2\,,\\
&= \left(\frac{2\cdot a+b}{2\cdot\mu\cdot A_1}+\frac{b/2}{2\cdot\mu\cdot A_1}\right)\cdot\Phi^2\,,\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot a+1{,}5\cdot b}{\mu\cdot A_1}\right)\cdot\Phi^2\,,\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot a+1{,}5\cdot b}{\mu\cdot A_1}\right)^{-1}\cdot(N_1\cdot I_1+N_2\cdot I_2)^2=\frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{R_\mathrm{m}}\,.
\end{aligned}$$

c)

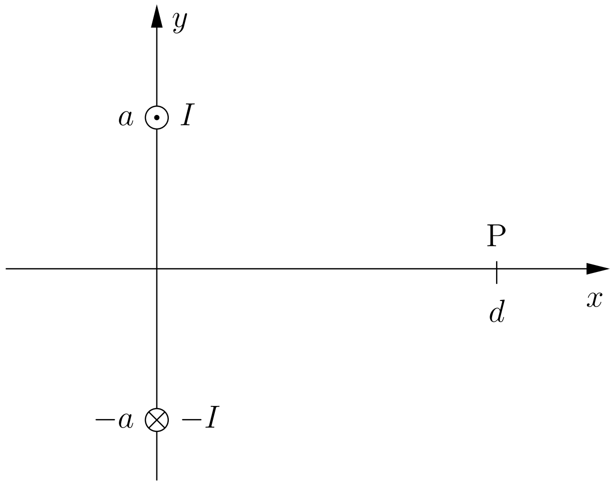
$$\begin{aligned}
\text{Induktionsgesetz}:\quad U_1 &= N_1\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}\,,\\
\Rightarrow \mathrm{d}\,\Phi &= \frac{1}{N_1}\int U_1\,\mathrm{d}t\,,\\
\Rightarrow \Phi(t) &= \frac{U_1}{N_1}t+\Phi(t=0)=\frac{U_1}{N_1}t.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
U_2 &= N_2\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}\,,\\
\text{mit } U_1 &= N_1\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}\,,\\
\Rightarrow U_2 &= \frac{N_2}{N_1}\cdot U_1\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 35

Zwei parallele, unendlich lange Leiter im Abstand $2a$ werden gegensinnig jeweils vom Strom I durchflossen. In der eingezeichneten Ebene AB befindet sich im Abstand d von der Leiterebene der Punkt P.

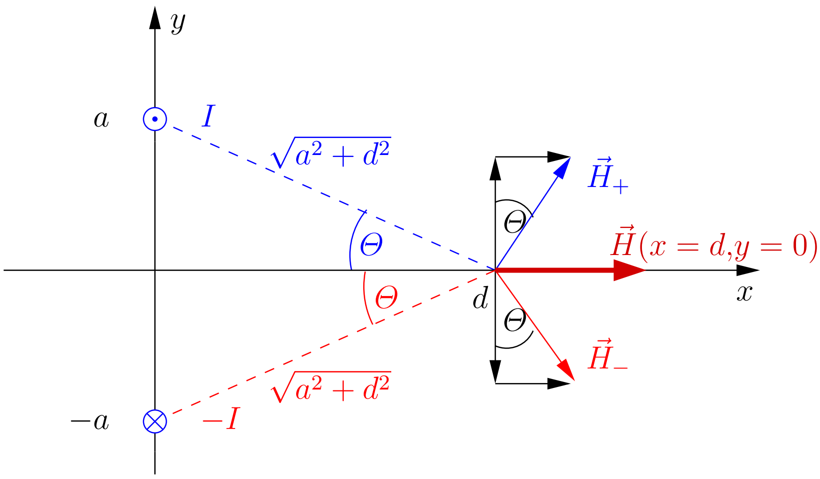


a) Skizzieren Sie qualitativ die von den beiden Leitern erzeugten einzelnen magnetischen Feldstärkevektoren sowie den resultierende magnetischen Feldstärkevektor $\vec{H}$ im Punkt P mit $x = d, y = 0$.

b) Berechnen Sie $\vec{H}(x,y = 0)$ und skizzieren Sie $|\vec{H}(x,y = 0)|$ als Funktion von x.

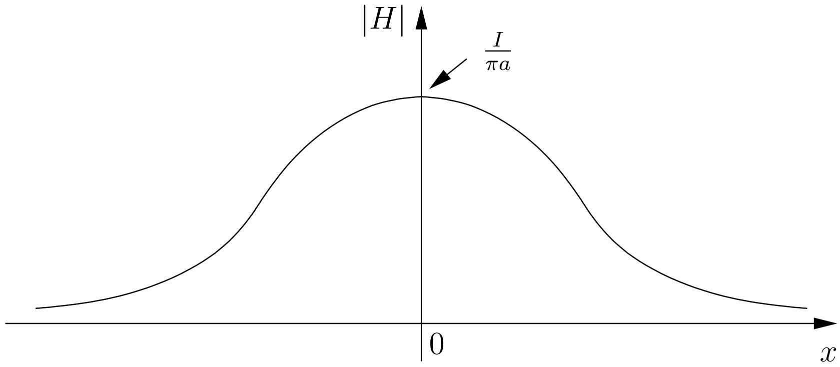
Lösung zu Aufgabe 35

a)



b)

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= 2H \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e}_x \\
&= 2 \cdot \underbrace{\frac{I}{2\pi\sqrt{a^2+x^2}}}_{H} \cdot \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}}_{\sin(\theta)}\,\vec{e}_x \\
&= \frac{I \cdot a}{\pi \cdot (a^2+x^2)}\,\vec{e}_x
\end{aligned}
$$

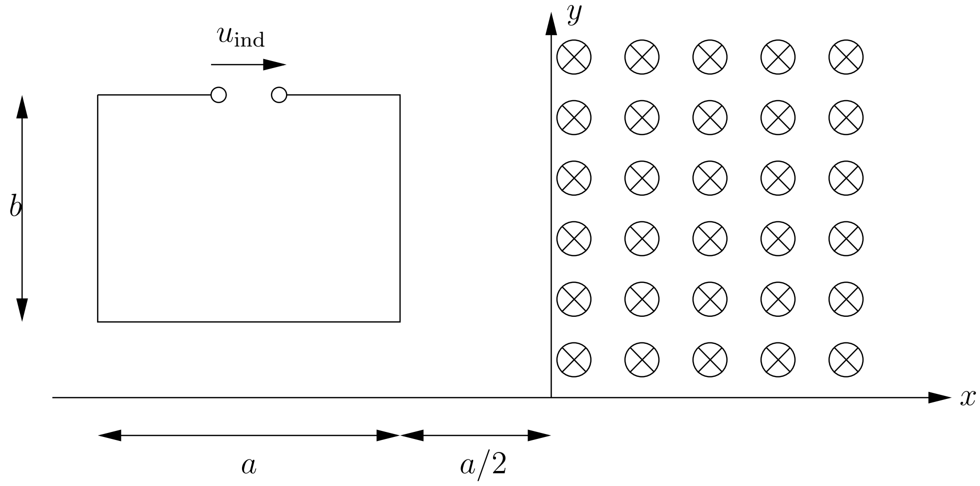


Aufgabe 36

Die unten skizzierte rechteckige Leiterschleife mit den Seitenlängen a und b bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ auf den Bereich $0 < x < a$ zu, in dem eine **homogene** magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = -B_0\vec{e}_z \qquad \text{für} \qquad 0 < x < a$$

vorgegeben ist.



a) Berechnen Sie für $0 < t < a/(2v)$. die in der Leiterschleife induzierte Spannung.

b) Berechnen Sie für $a/(2v) < t < (3a)/(2v)$ den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife $\varPhi(t)$.

c) Berechnen Sie für $a/(2v) < t < (3a)/(2v)$ die in der Leiterschleife induzierte Spannung.

Lösung zu Aufgabe 36

a) Triviale Lösung $u_{\text{ind}} = 0$, da das magnetische Feld die Spule nicht durchsetzt.
b) Ansatz über

$$\varPhi = \int\limits_{\text{Schleife im Feld}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A},$$

hier für das gegebene homogene Feld mit $\vec{B}||\vec{A}$:

$$\varPhi = B \cdot A(t).$$

Zu beachten ist, das $\varPhi$ von dem Anteil der Schleife abhängt, der momentan vom Feld durchsetzt wird. Für das gegebene Koordinatensystem wird für $a/(2v) < t < (3a)/(2v)$ $A(t) = b\,v\,(t - a/(2v))$, also:

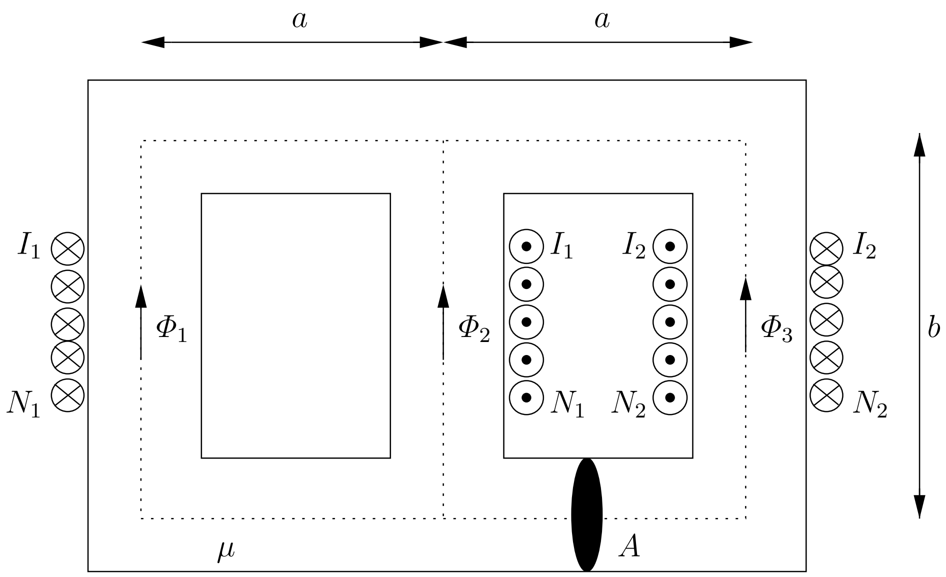
$$\varPhi(t) = B_0 bv\left(t - \frac{a}{2v}\right).$$

c) Aus dem Fluss lässt sich die induzierte Spannung berechnen:

$$u_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t} = -B_0 bv.$$

Aufgabe 37

Der skizzierte Eisenkreis mit der Permeabilität μ hat an jeder Stelle die Querschnittsfläche A. Die Spule 2 schließt den rechten Schenkel ein. Die Spule 1 schließt die beiden übrigen Schenkel ein. Die Spulen führen den Strom I_1 bzw. I_2.



a) Zeichnen Sie ein magnetisches Ersatzschaltbild der Anordnung und geben sie die Werte der Quellen und der magnetischen Widerstände an.

b) Bestimmen Sie den magnetischen Fluss Φ_3.

Im folgenden gilt: $I_2 = \hat{\imath}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $I_1 = 0$.

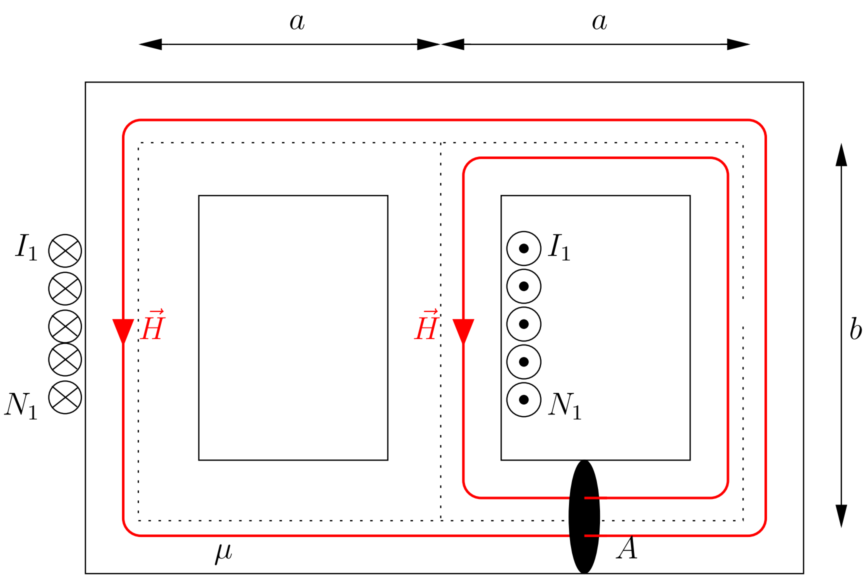
c) Bestimmen Sie den Betrag der in der Spule 2 induzierten Spannung U_i.

d) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der im Eisenkreis gespeicherten magnetischen Energie.

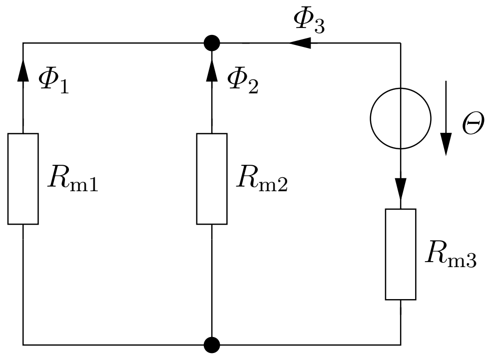
Lösung zu Aufgabe 37

a) Um das magnetische Ersatzschaltbild aufzustellen, müssen wir uns zunächst Gedanken machen, wie wir mit der Spule 1 verfahren müssen. Das Durchflutungsgesetz besagt, dass eine magnetische Feldlinie von einem Strom verursacht wird, den sie umschließt:

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$



Die Summe der magnetischen Spannungen in jeder Masche des Ersatzschaltbildes muss folglich gleich der eingeschlossenen Durchflutung ($\Theta_1 = N_1 I_1$) sein. Dies wird erfüllt durch folgenden Ersatzschaltbild:



$$\begin{aligned}
\Theta &= N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2 \,, \\
R_{\mathrm{m1}} &= R_{\mathrm{m3}} = \frac{2a+b}{\mu A} \,, \\
R_{\mathrm{m2}} &= \frac{b}{\mu A} \,.
\end{aligned}$$

b)

$$\Phi_3 = \underbrace{\left(R_{\mathrm{m3}} + R_{\mathrm{m1}} || R_{\mathrm{m2}}\right)^{-1}}_{=:R_{\mathrm{m}}} \left(N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2\right)$$

c)

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{i}} &= N_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} \,, \\
&= \frac{R_{\mathrm{m1}} + R_{\mathrm{m2}}}{\left(R_{\mathrm{m1}}\right)^2 + 2 \cdot R_{\mathrm{m1}} R_{\mathrm{m2}}} \cdot N_2^2 \cdot \hat{\imath} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t\right) \,.
\end{aligned}$$

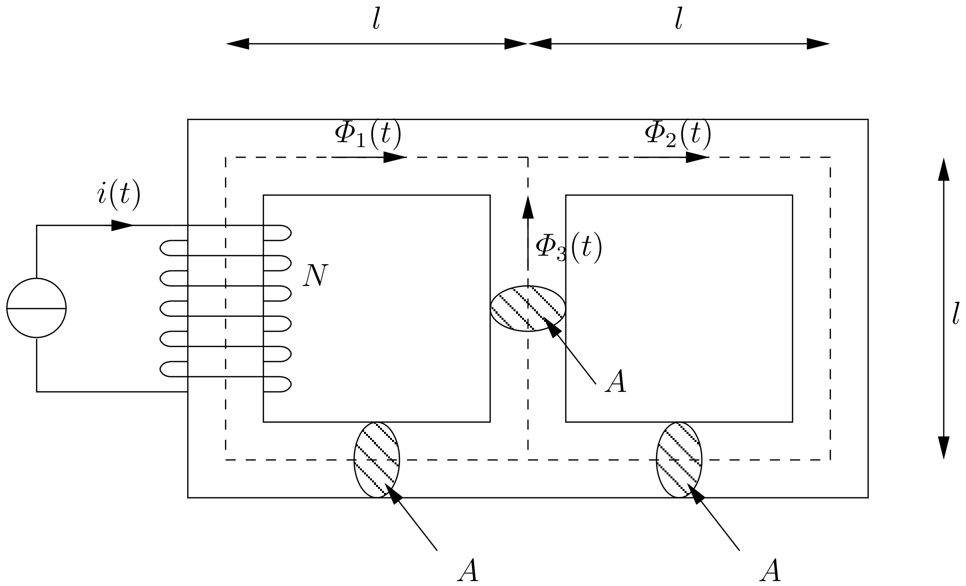
d)

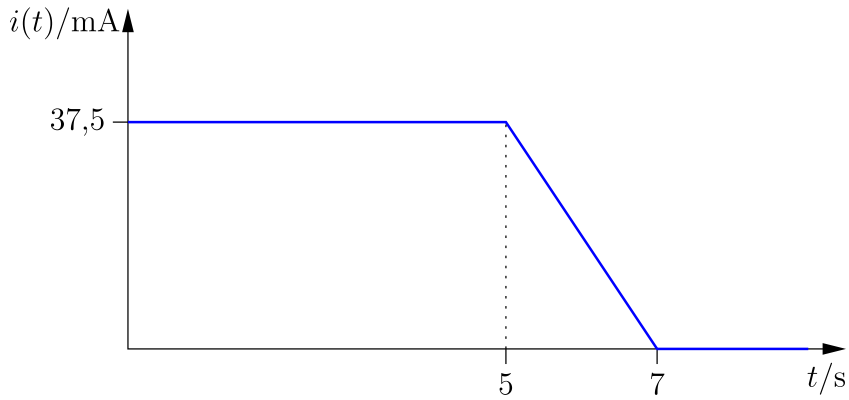
$$W = \frac{1}{2} L i_2^2(t) = \frac{1}{2} \frac{N^2}{R_\mathrm{m}} i_2^2(t)$$

Aufgabe 38

Gegeben ist ein Magnetkreis, der an eine Stromquelle mit dem eingeprägten Strom $i(t)$ angeschlossen ist. Der Zeitverlauf von $i(t)$ ist unten skizziert. Folgende Daten sind bekannt:

$$\begin{aligned} \text{mittlere Länge:} \quad & l && = 0{,}1\,\mathrm{m}, \\ \text{Anzahl Windungen Spule} \quad & N && = 10, \\ \text{Eisenquerschnittsfläche:} \quad & A && = 0{,}001\,\mathrm{m}^2, \\ \text{Permeabilität:} \quad & \mu_\mathrm{r} \cdot \mu_0 && = \frac{1}{100} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \end{aligned}$$





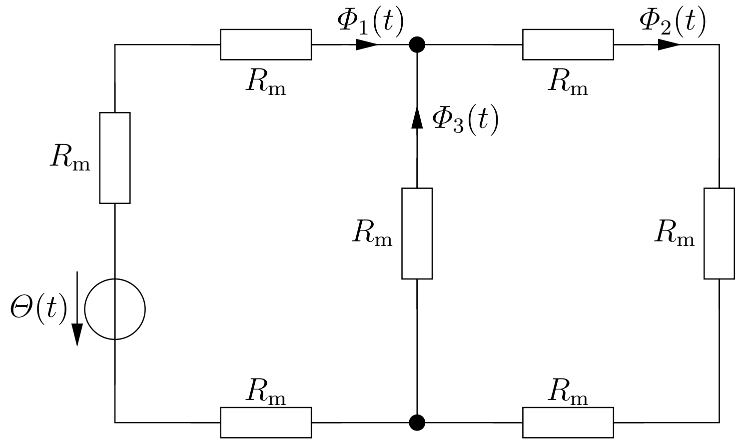
a) Berechnen Sie den Fluss $\Phi_3\,(t)$ für $0 \leq t \leq 5\,\mathrm{s}$.

b) Berechnen Sie den Fluss $\Phi_3\,(t)$ für $5\,\mathrm{s} < t < 7\,\mathrm{s}$.

c) Zeichnen Sie den quantitativen Verlauf $\Phi_3\,(t)$.

Lösung zu Aufgabe 38

Ersatzschaltbild des Magnetkreises:



Der Magnetkreis ist aus gleichen Elementen mit Eisenquerschnitt A und mittlerer Eisenlänge l aufgebaut. Der magnetische Widerstand eines Elements ist

$$
\begin{aligned}
R_\mathrm{m} &= \frac{1}{\mu_\mathrm{r} \cdot \mu_0} \cdot \frac{l}{A} = \frac{100\,\mathrm{Am}}{\mathrm{Vs}} \frac{0{,}1\,\mathrm{m}}{0{,}01\,\mathrm{m}^2}, \\
R_\mathrm{m} &= 1000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}.
\end{aligned}
$$

a) Der Fluss Φ_3 wird über den Flussteiler, analog zum Stromteiler bei elektrischen Netzwerken, aus dem Fluss Φ_1 bestimmt. Zunächst wird also Φ_1 errechnet:

$$
\begin{aligned}
N \cdot i(t) &= \Phi_1 \cdot (3R_\mathrm{m} + R_\mathrm{m} \,||\, 3R_\mathrm{m}), \\
&= \Phi_1 \cdot \left(3R_\mathrm{m} + \frac{R_\mathrm{m} \cdot 3R_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m} + 3R_\mathrm{m}}\right), \\
&= \Phi_1 \cdot \frac{15}{4} R_\mathrm{m}, \\
\Rightarrow \Phi_1 &= \frac{N \cdot i(t)}{\frac{15}{4} R_\mathrm{m}},
\end{aligned}
$$

dann Φ_3:

$$
\begin{aligned}
\Phi_3 &= -\Phi_1 \cdot \frac{1}{R_\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_\mathrm{m}} + \frac{1}{3R_\mathrm{m}}} = -\frac{3}{4}\Phi_1, \\
\Phi_3 &= -\frac{3}{4} \frac{N \cdot i(t)}{\frac{15}{4} R_\mathrm{m}}.
\end{aligned}
$$

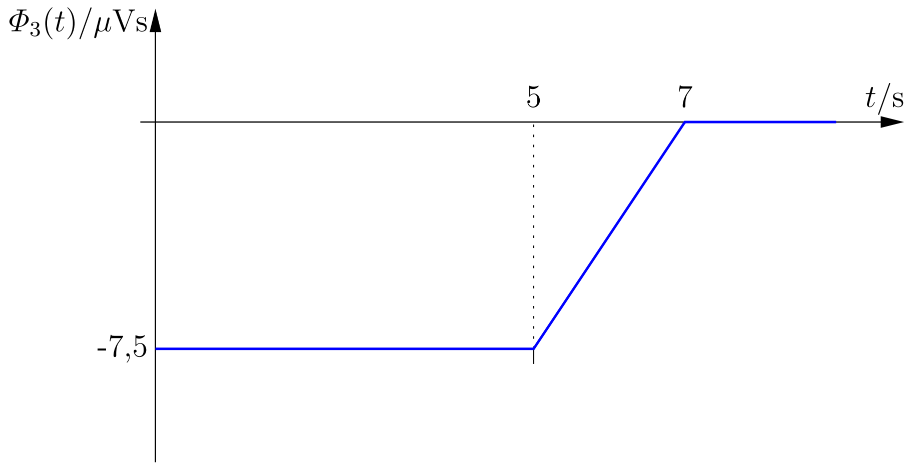
Der Fluss Φ_3 ist in der Zeit $0 \leq t \leq 5\,\mathrm{s}$ konstant, da der Strom ebenfalls einen konstanten Wert behält:

$$
\Phi_3(0 \leq t \leq 5\,\mathrm{s}) = -\frac{3}{15} \frac{10 \cdot 37{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}}{10000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}} = -7{,}5\,\mu\mathrm{Vs} =: \hat{\Phi}_3.
$$

b)

$$\Phi_3(5\,\mathrm{s} \leq t \leq 7\,\mathrm{s}) \quad = \quad \hat{\Phi}_3 - \frac{\hat{\Phi}_3}{2\,\mathrm{s}}\,(t - 5\,\mathrm{s})$$

c) qualitativer Verlauf für $\Phi_3\,(t)$

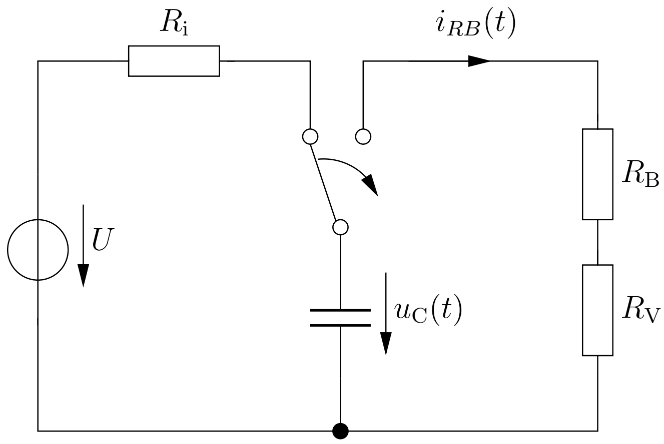


2.4 Transiente Vorgänge

Aufgabe 39

Ein Blitzgerät wird vereinfachend wie folgt modelliert:

Der als Energiespeicher für den Blitzvorgang verwendete Kondensator wird zunächst mit Hilfe der Batterien, die durch eine reale Spannungsquelle repräsentiert werden, aufgeladen. Der Blitz wird ausgelöst, indem mit Hilfe eines Wechselschalters der Stromkreis zur Spannungsquelle aufgetrennt wird und der Kondensator anschließend über die Blitzeinheit entladen wird. Diese Einheit soll aus der Blitzlampe selber (repräsentiert durch einen ohmschen Widerstand R_B) und einen ebenfalls ohmschen Vorwiderstand R_V dargestellt werden.



a) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem der Kondensator auf eine Spannung U_1 aufgeladen ist und der Blitz ausgelöst werden kann.

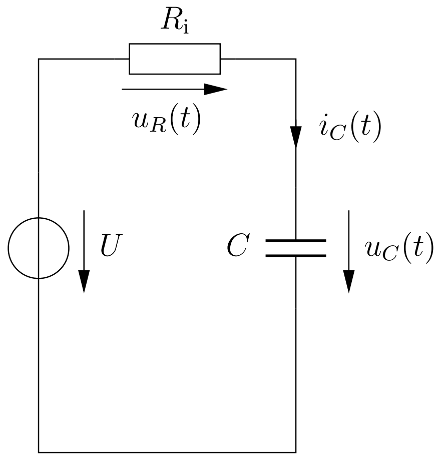
b) Das Blitzgerät wird nun direkt zum Zeitpunkt t_1 ausgelöst. Welcher zeitabhängige Strom fließt während des Entladevorganges in der Blitzlampe?

c) Wie groß ist der erreichte Maximalstrom?

d) Skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u_C(t)$ über den gesamten Vorgang. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung.

Lösung zu Aufgabe 39

a) ESB für den Aufladevorgang:



Differentialgleichung für $u_C(t)$ aufstellen und lösen.

Maschenumlauf:

$$U_0 = R_i \cdot i_C(t) + u_C(t)$$
$$U_0 = R_i \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t)$$
$$R_i \cdot C \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = U_0$$
$$R_i \cdot C = \tau_1$$

Ansatz Lösung DGL:

$$u_C(t) = K_1 + K_2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$$

Endbedingung:

$$u_C(t \to \infty) = K_1 = U$$

Anfangsbedingung:

$$u_C(t = 0) = K_1 + K_2 = 0$$
$$\Rightarrow K_2 = -K_1 = -U$$

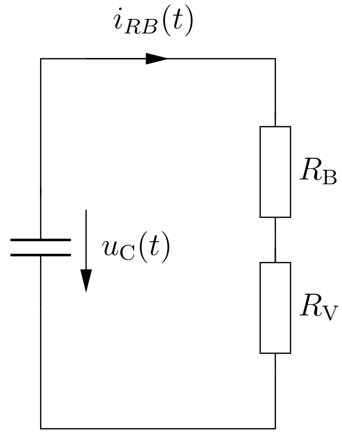
Einsetzen:

$$u_C(t) = U_0 - U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_i \cdot C}\right)$$
$$u_C(t) = U_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_i \cdot C}\right)\right)$$

$u_C(t) = U_1$, umformen nach t :

$$t_1 = -\ln\left(1 - \frac{U_1}{U_0}\right) \cdot R_i \cdot C$$

b) ESB für den Entladevorgang:



Es gilt:

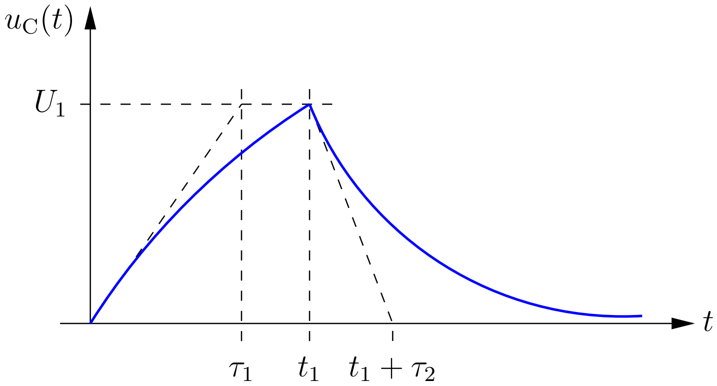
$$\begin{aligned}
i_{RB}(t) &= -C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{Vorzeichen beachten! Verbraucherbepfeilung!}\\
i_{RB}(t) &= \frac{u_C(t)}{R_B+R_V}\\
\Rightarrow 0 &= \frac{u_C(t)}{R_B+R_V} + C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\\
\Rightarrow 0 &= \underbrace{(R_B+R_V)C}_{\tau_2}\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= K_1 + K_2\cdot\exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)\\
u_C(t\to\infty) &= K_1 = 0\\
u_C(t_1) &= K_1 + K_2 = U\\
\Rightarrow K_2 &= U\\
\Rightarrow u_C(t) &= U\exp\left(-\frac{t-t_1}{(R_B+R_V)C}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{u_C(t)}{R_B+R_V}\\
i(t) &= \frac{U}{R_B+R_V}\exp\left(-\frac{t-t_1}{(R_B+R_V)C}\right).
\end{aligned}$$

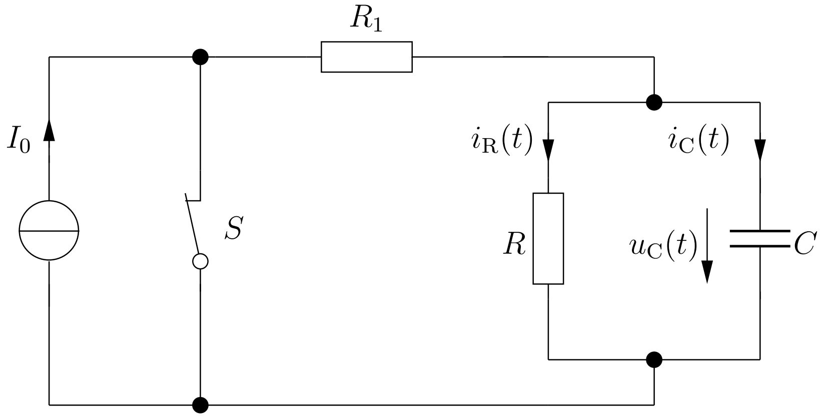
c) $$i_{\max} = i(t_1) = \frac{U_1}{R_B+R_V}$$

d) Spannungsverlauf:



Aufgabe 40

Die folgende Schaltung ist gegeben:



Der Schalter wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geöffnet.

a) Bestimmen Sie die Spannung u_C für $t \to 0$ nach dem Öffnen des Schalters und für $t \to \infty$ nach dem Abklingen aller Ausgleichsvorgänge.

b) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Spannung $u_C(t)$ auf.

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Spannung $u_C(t)$ und den Strom $i_R(t)$.

d) Bestimmen Sie die Energie, die zum Zeitpunkt $t_0 = RC$ und für $t \to \infty$ im Kondensator gespeichert ist.

Lösung zu Aufgabe 40

a) Anfangs- und Endbedingung:

$$\begin{aligned} u_C(t=0) &= 0 \\ u_C(t \to \infty) &= I_0 R \end{aligned}$$

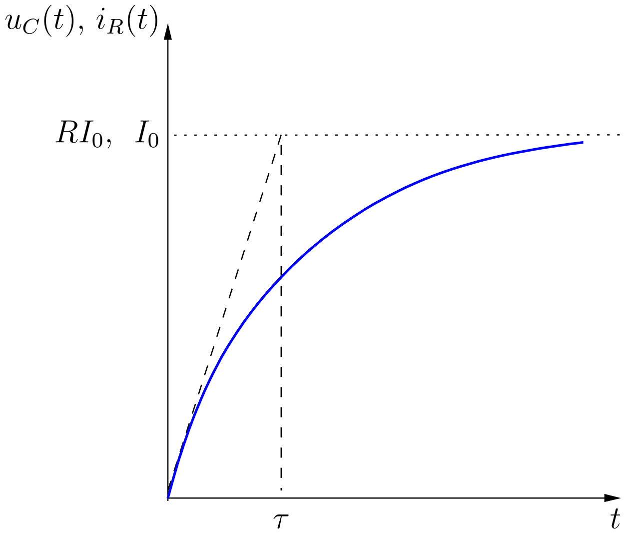
b)

$$\begin{aligned} \text{Knotensatz: } I_0 &= i_R(t) + i_C(t) \\ \text{Widerstand: } i_R(t) &= \frac{u_C(t)}{R} \\ \text{Kondensator: } i_C(t) &= C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad I_0 &= \frac{u_C(t)}{R} + C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \quad I_0 R &= \underbrace{RC}_{\tau}\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t). \end{aligned}$$

c) Lösung dieser DGL:

$$
\begin{aligned}
u_C(t) &= k_1 + k_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}. \\
\text{Endbedingung: } u_C(t \to \infty) &= k_1 = I_0 R, \\
\text{Anfangsbedingung: } u_\mathrm{C}(t = 0) &= k_1 + k_2 = 0, \\
\Rightarrow \quad k_2 &= -k_1 = -I_0 R, \\
\Rightarrow \quad u_\mathrm{C}(t) &= R I_0 (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \\
i_\mathrm{R}(t) &= \frac{u_\mathrm{C}(t)}{R} = I_0(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})
\end{aligned}
$$

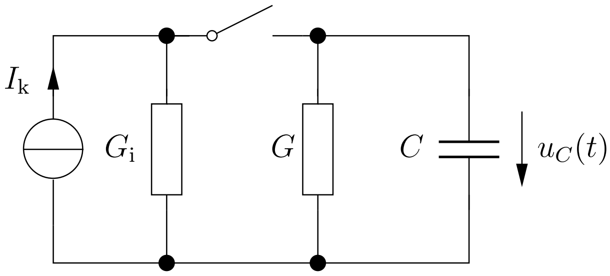


d)

$$
\begin{aligned}
W_\mathrm{C}(t \to \infty) &= \frac{1}{2} C \left(u_\mathrm{C}(t \to \infty)\right)^2 = \frac{1}{2} C (R I_0)^2 \\
W_\mathrm{C}(t_0) &= \frac{1}{2} C \left(u_\mathrm{C}(t_0)\right)^2 = \frac{1}{2} C R^2 I_0^2 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 41

Ein reale Stromquelle mit dem Kurzschlussstrom I_k und dem Innenleitwert G_i wird zum Zeitpunkt $t = 0$ auf eine Parallelschaltung aus einem Leitwert G und einem vollständig entladenen Kondensator C geschaltet:



a) Berechnen Sie die Spannung $U_\mathrm{s} = u_C(t \to \infty)$, die nach dem Ende des Ladevorgangs am Kondensator anliegt.

b) Berechnen Sie die Zeitkonstante τ des Ladevorgangs.

c) Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf der Spannung $u_C(t)$, die am Kondensator anliegt.

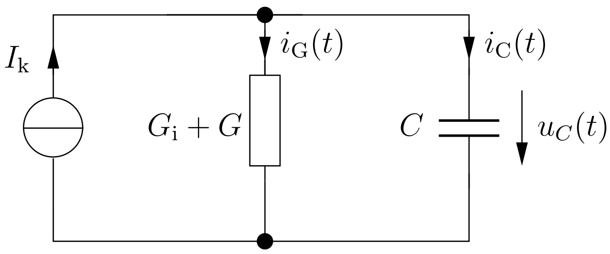
d) Zu welchem Zeitpunkt t_1 gilt: $u_C(t = t_1) = U_\mathrm{s}/2$?

Lösung zu Aufgabe 41

a)

$$U_\mathrm{s} = \frac{I_\mathrm{k}}{G_\mathrm{i} + G}.$$

b) Nach den Schließen des Schalters betrachten wir folgende Schaltung:



Nun nutzen wir den Knotensatz und die Bauelementgleichungen:

$$\begin{aligned} I_\mathrm{k} &= i_G(t) + i_C(t) \\ i_G(t) &= u_C(t)(G_\mathrm{i} + G) \\ i_C(t) &= C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_\mathrm{k} &= (G_\mathrm{i}+G)u_C(t) + C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow \frac{I_\mathrm{k}}{G_\mathrm{i}+G} &= \underbrace{\frac{C}{G_\mathrm{i}+G}}_{\tau}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) \\
\Rightarrow \tau &= \frac{C}{G_\mathrm{i}+G}.
\end{aligned}$$

c) Die Lösung der Differentialgleichung aus b) lautet allgemein

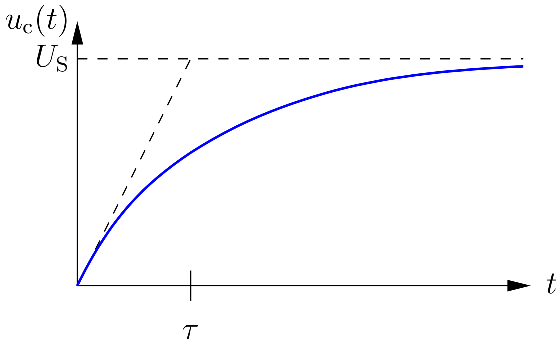
$$u_C(t) = k_1 + k_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Endbedingung:

$$u_C(t\to\infty) = k_1 = U_\mathrm{s}.$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}
u_C(t=0) &= k_1 + k_2 = 0\,, \\
\Rightarrow \quad k_1 &= -k_2 = -U_\mathrm{s}. \\
\Rightarrow \quad u_C(t) &= U_\mathrm{s}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right).
\end{aligned}$$

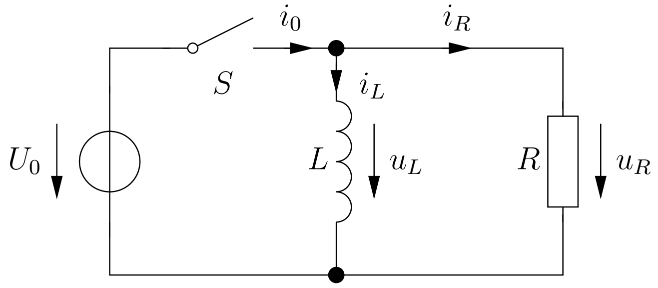


d)

$$\begin{aligned}
\frac{u_C(t=t_1)}{U_\mathrm{s}} &= \frac{1}{2} = 1-\mathrm{e}^{-t_1/\tau}\,, \\
\mathrm{e}^{-t_1/\tau} &= \frac{1}{2}\,, \\
-t_1/\tau &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)\,, \\
\Rightarrow t_1 &= \frac{C}{G_\mathrm{i}+G}\,\ln(2)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 42

In der skizzierten Schaltung wird der Schalter S zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Es gilt: $U_0 = 2{,}5\,\mathrm{V}$, $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$, $R = 1\,\Omega$.



a) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem im Magnetfeld der Spule die Energie $W_L = 25\,\mathrm{Ws}$ gespeichert wird.

b) Berechnen Sie die elektrische Energie, die bis zum Zeitpunkt t_1 aus der Spannungsquelle entnommen wird.

Zum Zeitpunkt t_1 wird der Schalter geöffnet.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Spannung $u_L(t)$ und des Stromes $i_L(t)$ für $0 \leq t \leq 5\,\mathrm{s}$. Geben Sie dabei die Minimal- und Maximalwerte von Strom und Spannung sowie die Zeitkonstante des Abklingvorganges an.

Lösung zu Aufgabe 42

a) Für W_L gilt:

$$W_L(t_1) = \frac{1}{2} L i_L^2(t_1) = 25\,\mathrm{Ws} \Rightarrow i_L(t_1) = \sqrt{\frac{2W_L}{L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,\mathrm{Ws}}{0{,}5\,\mathrm{H}}},$$

$$\Rightarrow \quad i_L(t_1) = 10\,\mathrm{A}.$$

An einer Induktivität gilt folgender Zusammenhang zwischen Strom und Spannung:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{L}\int\limits_{t'=0}^{t} U_0\,\mathrm{d}t' &= i_L(t) - i_L(0) \\ \Rightarrow i_L(t) &= \frac{U_0}{L} \cdot t \end{aligned}$$

Der Strom durch die Spule steigt bis t_1 linear an, da die Spule durch eine **ideale** Spannungsquelle aufmagnetisiert wird.

$$\Rightarrow \quad t_1 = i_L(t_1) \cdot \frac{L}{U_0} = 10\,\mathrm{A} \cdot \frac{0{,}5\,\mathrm{H}}{2{,}5\,\mathrm{V}},$$

Ergebnis:

$$t_1 = 2\,\text{s}.$$

b) Der Quelle wird neben der Energie, die zum Aufbau des Magnetfeldes verwendet wird, auch elektrische Leistung entnommen, die im Widerstand R umgesetzt wird:

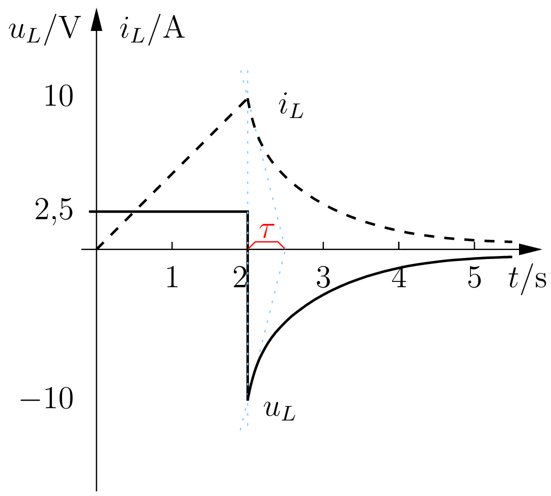
$$W_{\text{Quelle}} = W_L + W_R = W_L + \int_0^{t_1} p_R(t)\,\mathrm{d}t,$$

mit

$$p_R(t) = \frac{U_0^2}{R}.$$

$$\Rightarrow W_{\text{Quelle}} = W_L + \frac{U_0^2}{R}\,t_1 = 25\,\text{Ws} + \frac{(2{,}5\,\text{V})^2}{1\,\Omega}\cdot 2\,\text{s} = 25\,\text{Ws} + 6{,}25\,\text{W}\cdot 2\,\text{s} = 37{,}5\,\text{Ws}$$

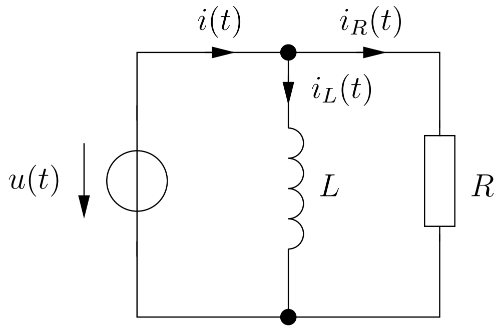
c)



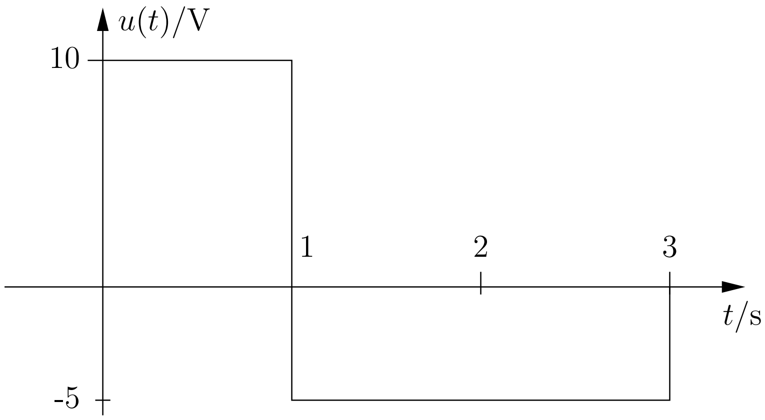
$u_{L\max} = 2{,}5\,\text{V}$, $u_{L\min} = -i_L(t_1)\cdot R = -10$ V,
$i_{L\max} = 10$ A, $i_{L\min} = 0$ A,
$\tau = L/R = 0{,}5\,\text{H}/1\,\Omega = 0{,}5\,\text{s}$.

Aufgabe 43

Eine Spannungsquelle ist an eine Parallelschaltung aus einer Spule mit der Induktivität $L = 1$ H und einem Widerstand $R = 1\,\Omega$ angeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spule stromfrei: $i_L(t = 0) = 0$.



Die Spannungsquelle liefert die folgende zeitabhängige Spannnung $u(t)$:



Berechnen und skizzieren Sie für $0 < t < 3$ s den zeitlichen Verlauf von

a) $i_R(t)$,

b) $i_L(t)$,

c) $i(t)$.

Beschriften Sie dabei die Minimal- und Maximalwerte der Ströme.

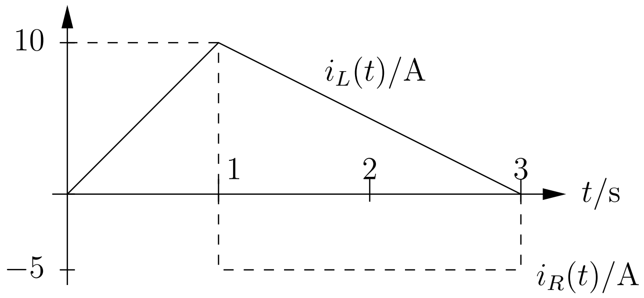
Lösung zu Aufgabe 43

Für den Strom durch den Widerstand gilt: $i_R(t) = u(t)/R$. Für den Strom durch die Spule gilt:

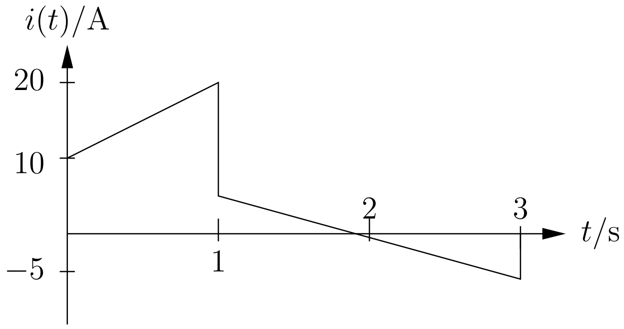
$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u(t)}{L} = \frac{10\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{H}} = 10\mathrm{A/s} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1\,\mathrm{s},$$

und

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{5\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{H}} = -5\,\mathrm{A/s} \quad \text{für} \quad 1 \leq t \leq 3\,\mathrm{s}.$$



Den Gesamtstrom erhält man durch Addition der beiden Einzelströme: $i = i_R + i_L$:



2.5 Transformator

Aufgabe 44

An die Sekundärseite eines T-symmetrischen Transformators mit vernachlässigbaren Eisenverlusten und vernachlässigbarem Magnetisierungsstrom wird ein ohmscher Widerstand $R = 400\,\Omega$ angeschlossen. Die Windungszahlen des Transformators sind bekannt:

$$N_1 = 100, \quad N_2 = 200.$$

Der Transformator wird nun auf der Primärseite an eine Wechselspannungsquelle mit $U_1 = 230\,\mathrm{V}$ und einer Frequenz von 50 Hz angeschlossen. Dabei fließt auf der Sekundärseite ein Strom von $I_2 = 0{,}5\,\mathrm{A}$ und die Verlustleistung des Transformators beträgt 30 W.

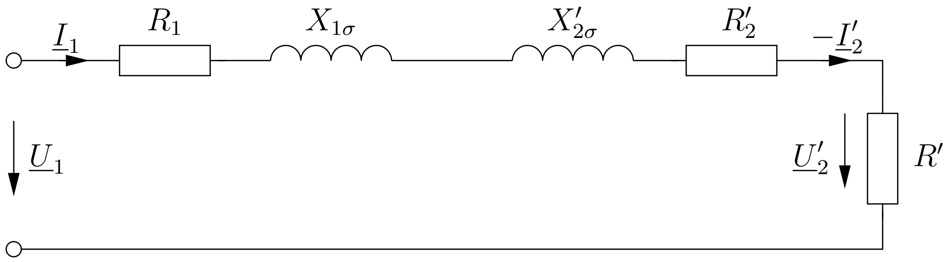
a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des belasteten Transformators. Beschriften Sie dabei alle verwendeten Größen.

b) Berechnen Sie den sekundärseitigen Wicklungswiderstand.

c) Berechnen Sie die Beträge der der Quelle entnommenen Schein- und Wirkleistung.

Lösung zu Aufgabe 44

a) Da laut Aufgabenstellung sowohl die Einsenverluste (R_V) als auch der Magnetisierungsstrom (L_h) vernachlässigt werden können, sieht das Ersatzschaltbild folgendermaßen aus:



Auf die Primärseite transformierte Größen (mit $\ddot{u} = N_1/N_2 = 0{,}5$):

$$I'_2 = I_2/\ddot{u} = 1\,\mathrm{A}, \quad R' = R \cdot \ddot{u}^2 = 100\,\Omega.$$

b) Aufgrund der T-Symmetrie gilt:

$$R_1 = R'_2$$

Mit $I_1 = I'_2$ gilt dann für die Wirkleistung, die in den Windungen umgesetzt wird:

$$P_V = (I'_2)^2(R_1 + R'_2) = 2\,(1\,\mathrm{A})^2 R'_2 = 30\,\mathrm{W} \Rightarrow R'_2 = 15\,\Omega$$

und

$$R_2 = R'_2/\ddot{u}^2 = 60\,\Omega.$$

c) Für die Wirkleistung auf der Sekundärseite gilt:

$$P_2 = I_2^2 \cdot R = (0{,}5\,\mathrm{A})^2 \cdot 400\,\Omega = 100\,\mathrm{W}.$$

Die der Quelle entnommene Wirkleistung ist

$$P_1 = P_2 + P_V = 130\,\mathrm{W},$$

die Scheinleistung

$$S = U_1 \cdot I_2' = 230\,\mathrm{V} \cdot 1\,\mathrm{A} = 230\,\mathrm{VA}.$$

Aufgabe 45

Ein T-symmetrischer Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $ü$ wird mit der Last $\underline{Z}$ verbunden. Es gilt $\underline{Z} = R_1$ mit dem primärseitigen Wicklungswiderstand R_1. Die Schaltung wird durch eine Sinusspannungsquelle mit der Leerlaufspannung $\underline{U}_0$ und dem Innenwiderstand R_i bei der Kreisfrequenz ω gespeist. Die sekundärseitige Streuinduktivität hat die Größe $L_{2\sigma}$. Alle genannten Größen sind bekannt.

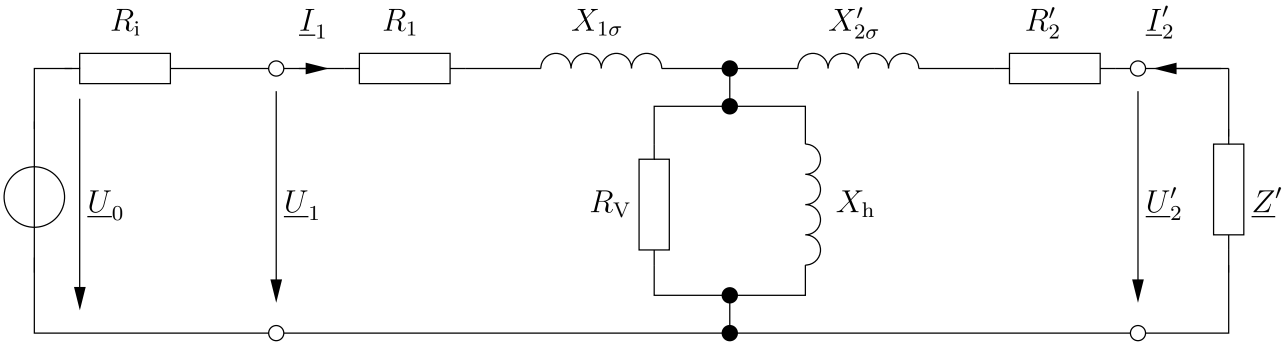
a) Skizzieren Sie das Ersatzschaltbild des gesamten Aufbaus inklusive des vollständigen Ersatzschaltbildes des Transformators. Achten Sie auf die Beschriftung der Bauelemente sowie der Spannungen und Ströme.

b) Vereinfachen Sie das Ersatzschaltbild für den geschilderten Belastungsfall.

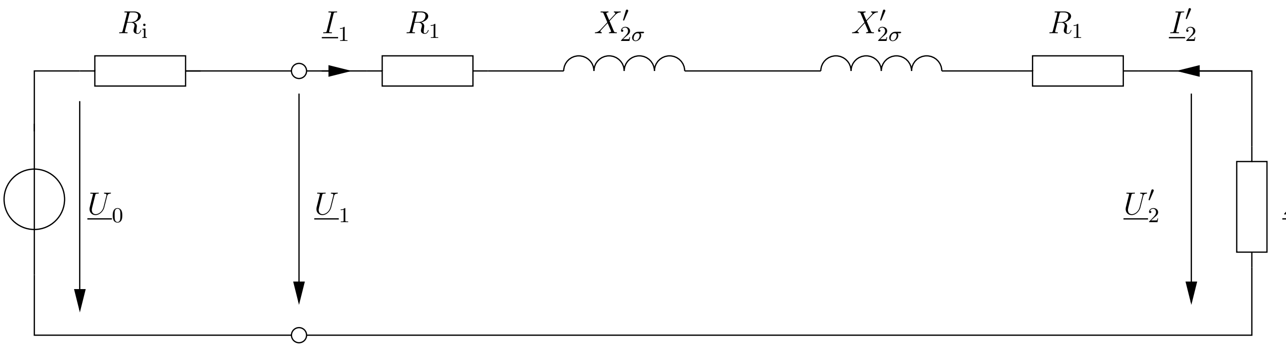
c) Bestimmen Sie die Spannung an der Last $\underline{Z}$ in Abhängigkeit von gegebenen Größen.

Lösung zu Aufgabe 45

a) Vollständiges Ersatzschaltbild:



b) Da die Last so groß ist wie die der primäre Wicklungswiderstand ($\underline{Z} = R_1$), kann für den Trafo das Kurzschlussersatzschaltbild verwendet werden, denn die Bedingung dass der Strom durch den Querzweig vernachlässigt werden kann, ist erfüllt.



c) Komplexer Spannungsteiler

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_2'}{\text{ü}} = \frac{1}{\text{ü}} \frac{\underline{U}_0 \cdot \underline{Z}'}{R_\mathrm{i} + 2R_1 + \mathrm{j}2X_{2\sigma}' + \underline{Z}'},$$
$$\underline{Z}' = \ddot{u}^2 \cdot \underline{Z} = \ddot{u}^2 R_1,$$
$$\underline{Z}' = 4 \cdot R_1$$
$$\underline{U}_2 = \frac{1}{\text{ü}} \frac{\underline{U}_0 \cdot R_1}{R_\mathrm{i} + (2 + \text{ü})R_1 + \mathrm{j}2\omega L_{2\sigma}'},$$

Aufgabe 46

An einem T-symmetrischen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 2$ werden bei $f = 50\,\text{Hz}$ ein Kurzschluss- und ein Leerlaufversuch mit den folgenden Ergebnissen durchgeführt:

$$U_{1\text{k}} = 20\,\text{V}, \qquad I_{1\text{k}} = 2\,\text{A}, \qquad P_{1\text{k}} = 24\,\text{W};$$
$$U_{10} = 230\,\text{V}, \qquad I_{10} = 100\,\text{mA}, \qquad P_{10} \approx 0\,\text{W}.$$

a) Skizzieren Sie das Ersatzschaltbild des Transformators und geben Sie die Werte der Schaltelemente an.

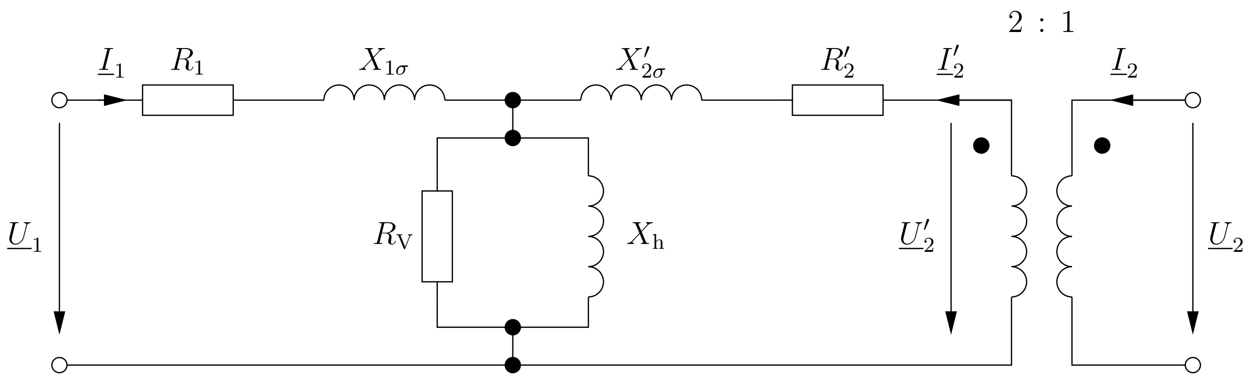
Durch einen sekundärseitig angeschlossenen Lastwiderstand von $R = 56\,\Omega$ fließt ein Strom von $I_2 = 2$ A. Bestimmen Sie für diesen Betriebszustand

b) die Primärspannung U_1 unter Benutzung des Kurzschluss-Ersatzschaltbildes des Transformators,

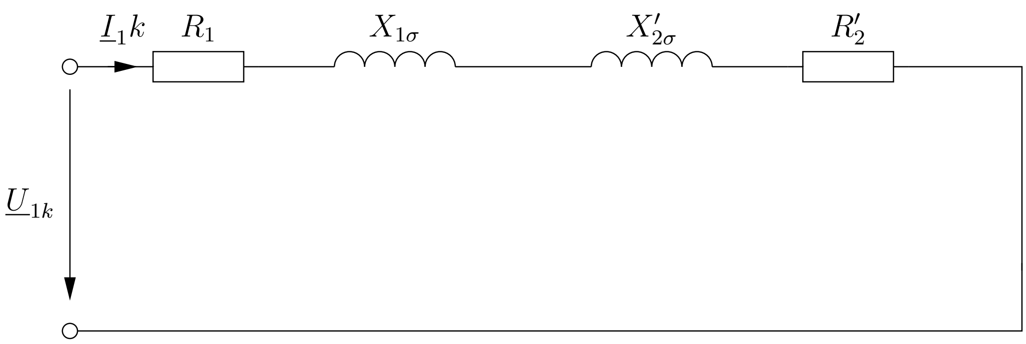
c) den Wirkungsgrad des Transformators.

Lösung zu Aufgabe 46

a)



Auswertung des Kurzschlussversuchs:

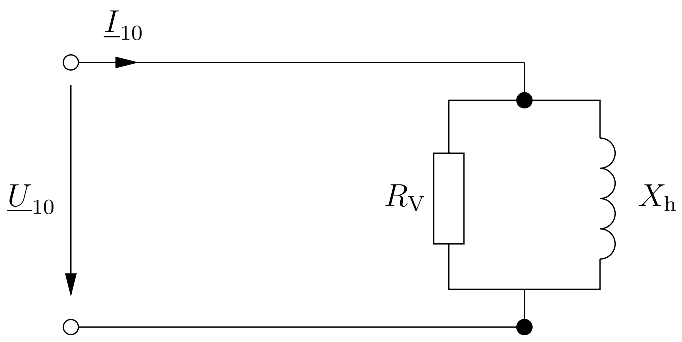


$$|Z_\mathrm{k}| = \frac{|U_{1\mathrm{k}}|}{|I_{1\mathrm{k}}|} = 10\,\Omega\,, \quad \cos(\varphi_{1\mathrm{k}}) = \frac{P_{1\mathrm{k}}}{U_{1\mathrm{k}} I_{1\mathrm{k}}} = \frac{3}{5}\,,$$

$$\Rightarrow R_\mathrm{k} = 6\,\Omega, \quad X_\mathrm{k} = \sqrt{Z_\mathrm{k}^2 - R_\mathrm{k}^2} = 8\,\Omega\,,$$

$$\Rightarrow R_1 = R_2' = 3\,\Omega, \quad X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = 4\,\Omega\,.$$

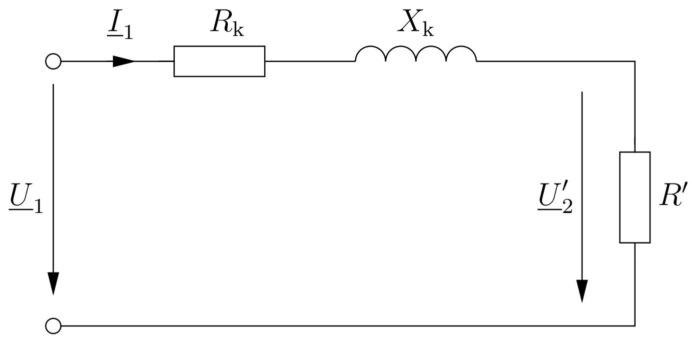
Auswertung des Leerlaufversuchs:



$$P_{10} = 0\,\mathrm{W}$$
$$\Rightarrow R_\mathrm{Fe} = \infty\,,$$

$$X_{1\mathrm{h}} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = 2{,}3\,\mathrm{k}\Omega\,.$$

b)



$$I_1 = I_2' = \frac{I_2}{\ddot{u}} = 1\,\mathrm{A}, \quad R' = \ddot{u}^2 \cdot R = 224\,\Omega\,,$$

$$\Rightarrow \underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot (R_\mathrm{k} + jX_\mathrm{k} + R')\,,$$

$$\Rightarrow U_1 = 1\mathrm{A} \cdot \sqrt{230^2 + 8^2}\,\Omega = \sqrt{230^2 + 8^2}\,\mathrm{V}\,.$$

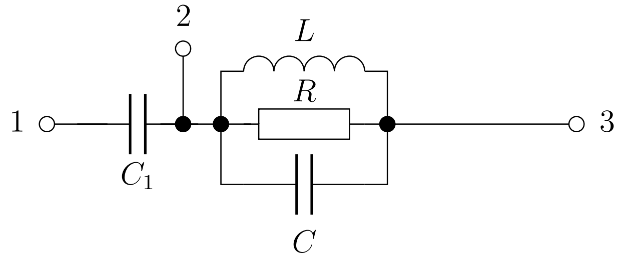
c) Der Wirkungsgrad berechnet sich aus der Leistung in der Last und der im gesamten System (Trafo + Last) umgesetzten Leistung.

$$\eta = \frac{\overbrace{I_2^2 \cdot R}^{\text{Last}}}{\underbrace{I_2^2 \cdot R}_{\text{Last}} + \underbrace{I_2'^2 \cdot R_\mathrm{k}}_{\text{Trafo}}} = \frac{224\,\mathrm{W}}{224\,\mathrm{W} + 6\,\mathrm{W}} = \frac{112}{115}\,.$$

2.6 Ortskurven

Aufgabe 47

Gegeben ist die folgende Schaltung:

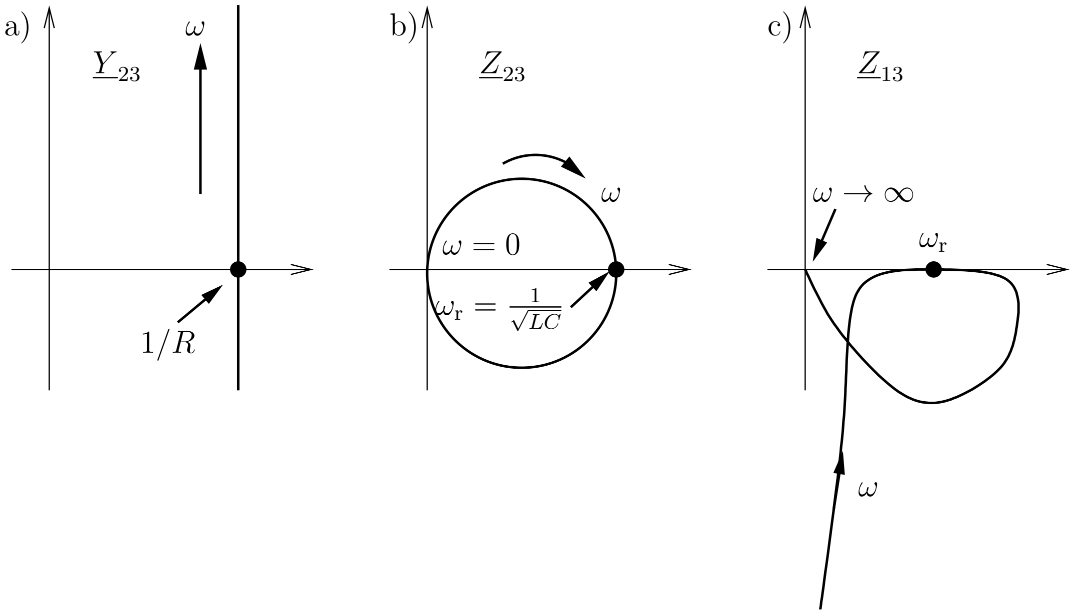


a) Skizzieren Sie die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}_{23}(\omega)$ zwischen den Klemmen 2 und 3.

b) Konstruieren Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}_{23}(\omega)$ zwischen den Klemmen 2 und 3.

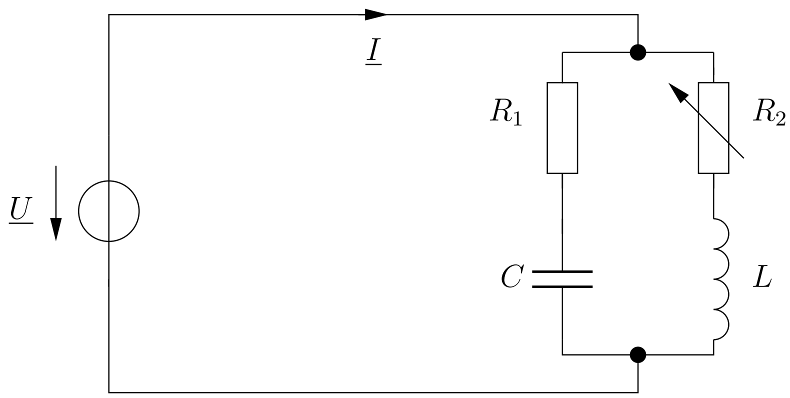
c) Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}_{13}(\omega)$ für den Fall, dass die Schaltung genau eine Resonanzfrequenz ω_r besitzt.

Lösung zu Aufgabe 47



Aufgabe 48

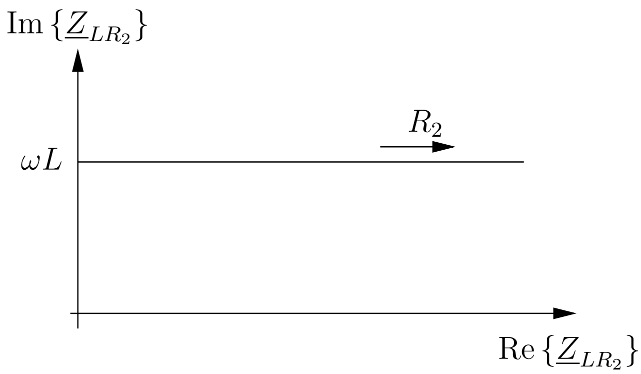
Das Verhalten der unten angegebenen Schaltung aus vier passiven Bauelementen soll für verschiedene Werte des Widerstandes R_2 untersucht werden. Dieser ist beliebig einstellbar: $0 \leq R_2 \leq \infty$. Die Schaltung wird an einer Wechselspannungsquelle betrieben, die eine sinusförmige Spannung mit fester Kreisfrequenz ω liefert.

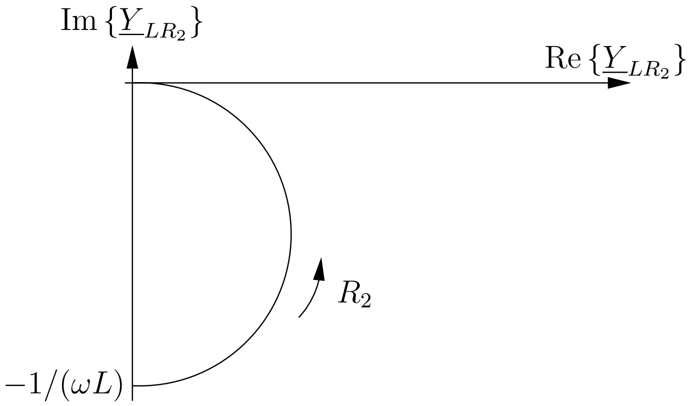


Entwickeln Sie schrittweise die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}(R_2) = \underline{I}(R_2)/\underline{U}$ als Funktion des Wertes des Widerstandes R_2.

Lösung zu Aufgabe 48

Mit $\underline{Z}_{LR_2} = R_2 + \mathrm{j}\omega L$ und $\underline{Y}_{LR_2} = 1/\underline{Z}_L$ ergibt sich:

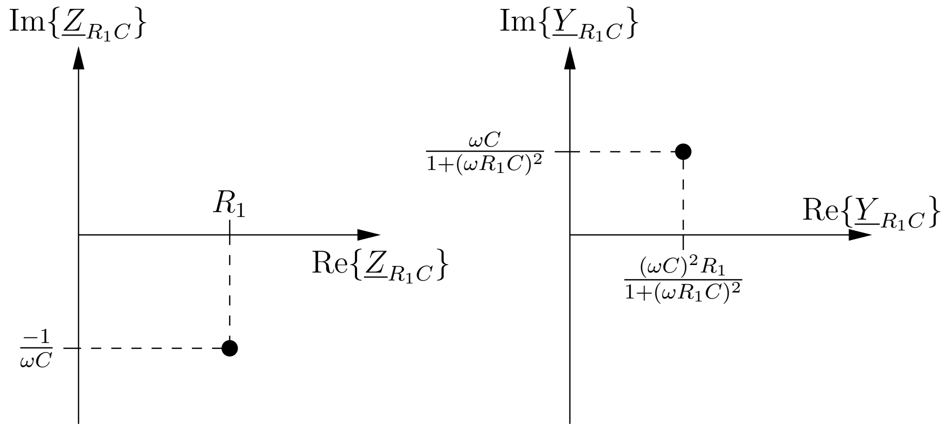




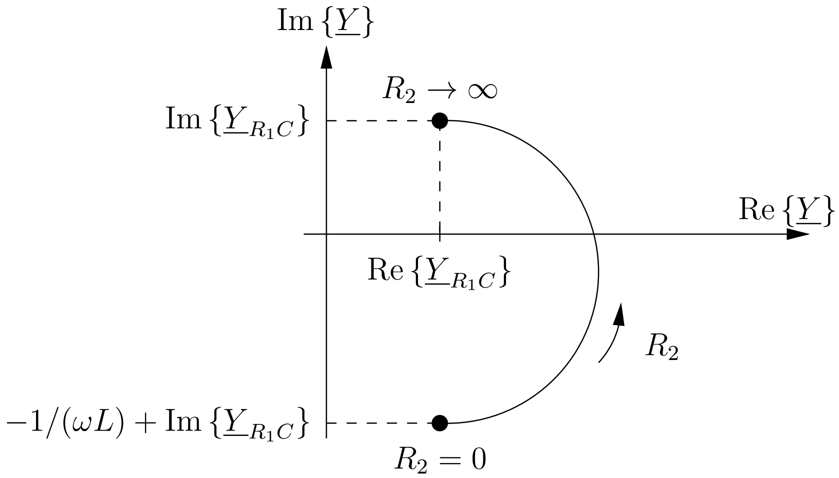
Zur vollständigen Beschriftung der resultierenden Ortskurve muss die Admittanz des linken Brückenzweiges berechnet werden:

$$\underline{Z}_{R_1C} = R_1 + 1/(\,\mathrm{j}\omega C) = \frac{1 + \mathrm{j}\omega R_1 C}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$\underline{Y}_{R_1C} = \frac{1}{\underline{Z}_{R_1C}} = \frac{\mathrm{j}\omega C}{1 + \mathrm{j}\omega R_1 C} = \frac{\mathrm{j}\omega C(1 - \mathrm{j}\omega R_1 C)}{1 + (\omega R_1 C)^2} = \frac{(\omega C)^2 R_1 + \mathrm{j}\omega C}{1 + (\omega R_1 C)^2}$$

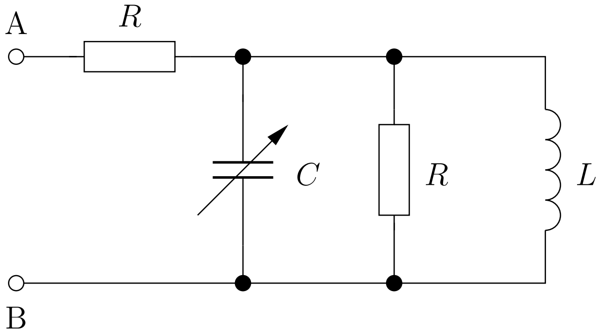


Für die vollständige Ortskurve ergibt sich schließlich:



Aufgabe 49

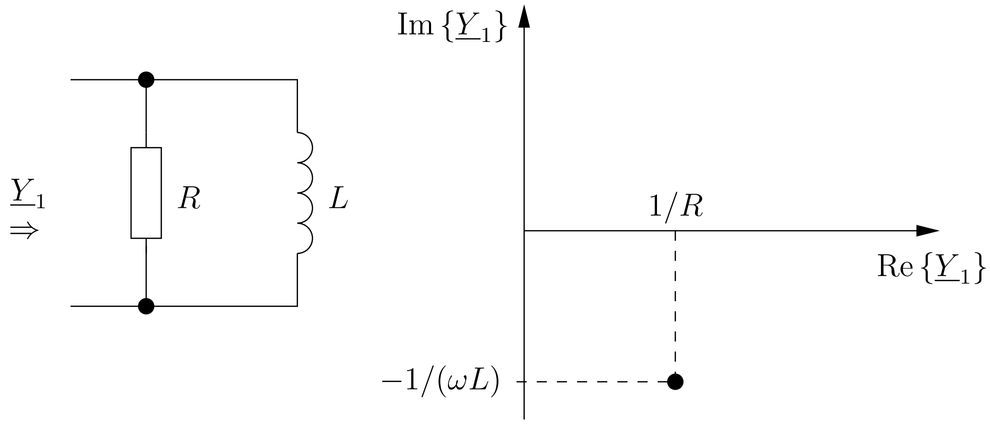
Ein verlustbehafteter Parallelschwingkreis besteht aus einer Induktivität L, zwei Widerständen R und einer variablen Kapazität C, siehe Skizze. Der Schwingkreis wird von einer Sinusquelle mit konstanter Kreisfrequenz ω gespeist. Bei dieser Kreisfrequenz gilt: $\omega L = R$.



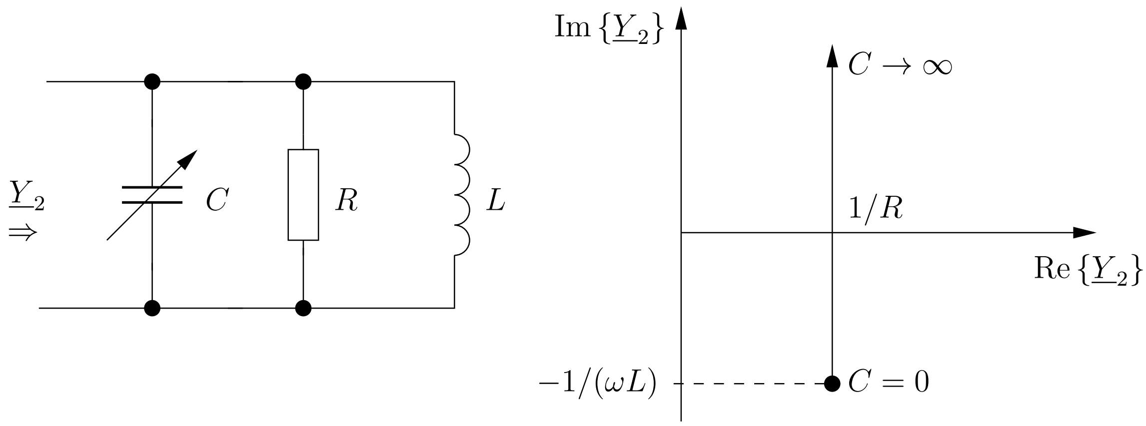
Entwickeln Sie schrittweise die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}_{\mathrm{AB}}$ zwischen den Klemmen A und B in Abhängigkeit von der Kapazität C.

Lösung zu Aufgabe 49

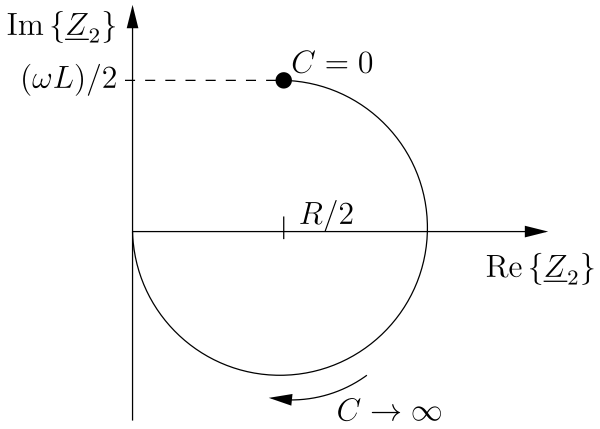
Erster Schritt: Admittanz der Parallelschaltung aus L und R:



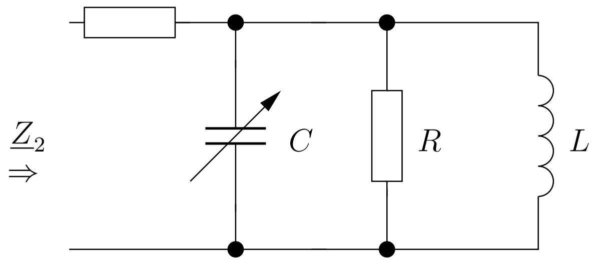
Hinzufügen der Kapazität

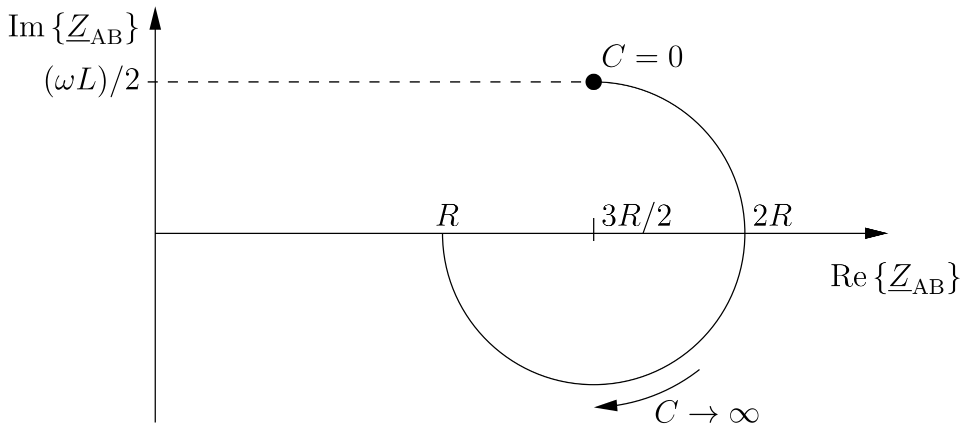


Inversion:

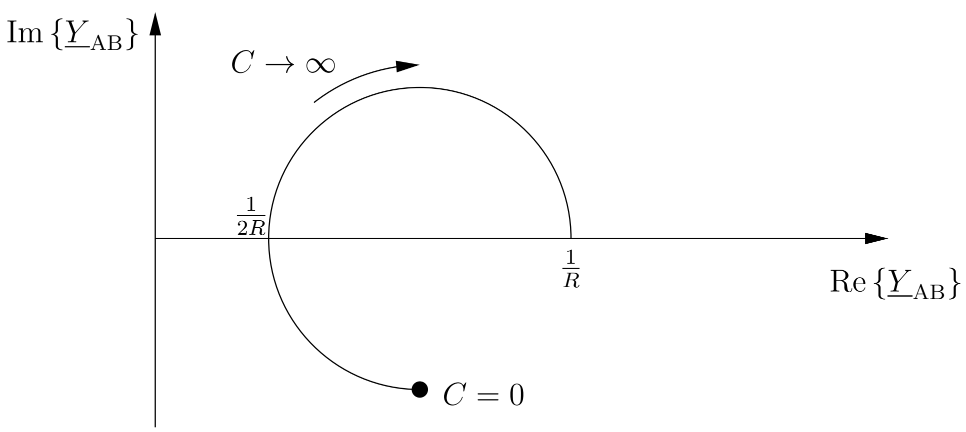


Hinzufügen des zweiten Widerstands



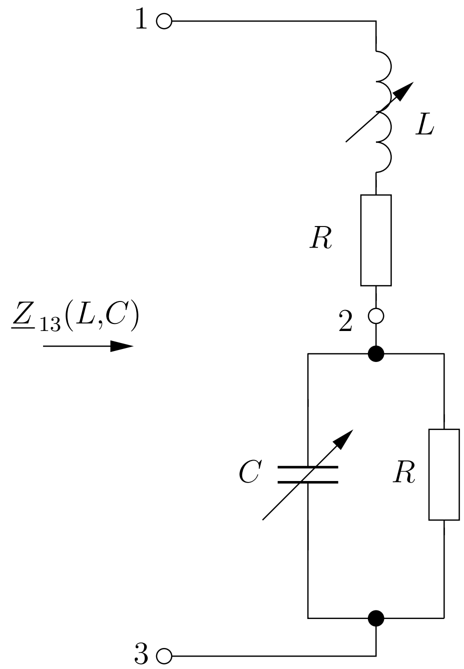


Inversion:



Aufgabe 50

Gegeben ist die folgende, bei der festen Kreisfrequenz ω betriebene Schaltung mit einer variablen Induktivität L und einer variablen Kapazität C:



Skizzieren Sie schrittweise (keine Rechnung) die beiden Ortskurven des komplexen Widerstandes $\underline{Z}_{13}$ zwischen den Klemmen 1 und 3 für:

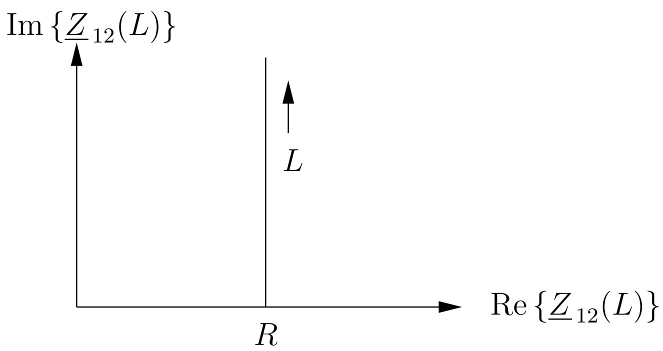
a) $\underline{Z}_{13}(L) = \underline{Z}_{13}(L, C = C_1 = \text{const})$,

b) $\underline{Z}_{13}(C) = \underline{Z}_{13}(L = L_1 = \text{const}, C)$.

Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung.

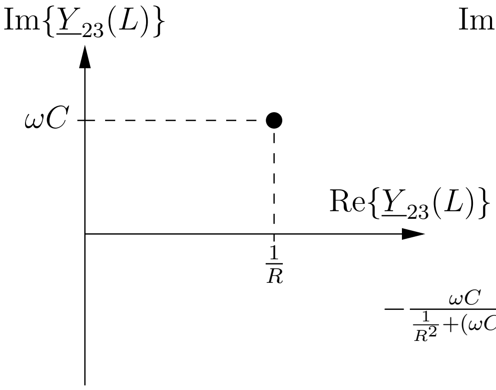
Lösung zu Aufgabe 50

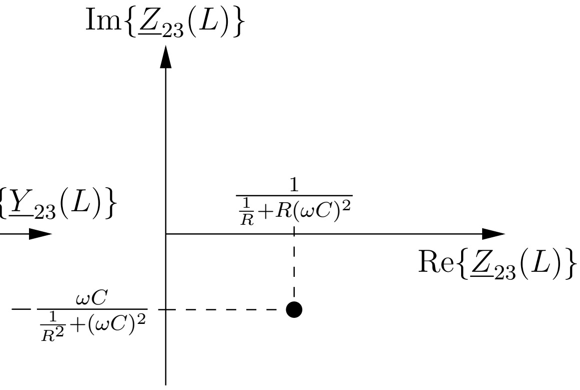
a) Impedanz der Reihenschaltung aus R und variablem L:



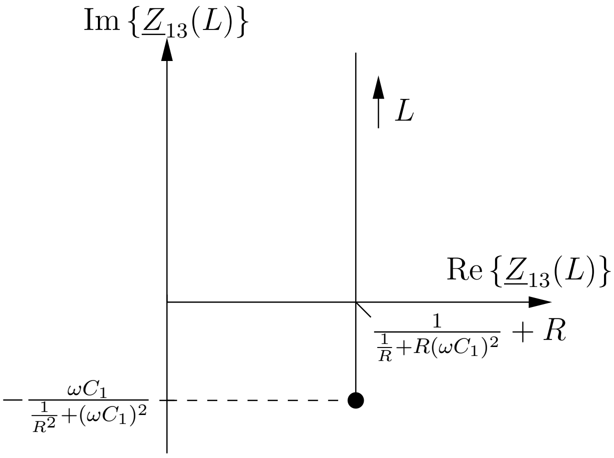
Die Impedanz $\underline{Z}_{23}(L)$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{23} &= \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C \\ \underline{Z}_{23} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{\frac{1}{R} - \mathrm{j}\omega C}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} = \frac{1}{\frac{1}{R} + R(\omega C)^2} - \mathrm{j}\frac{\omega C}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} \end{aligned}$$

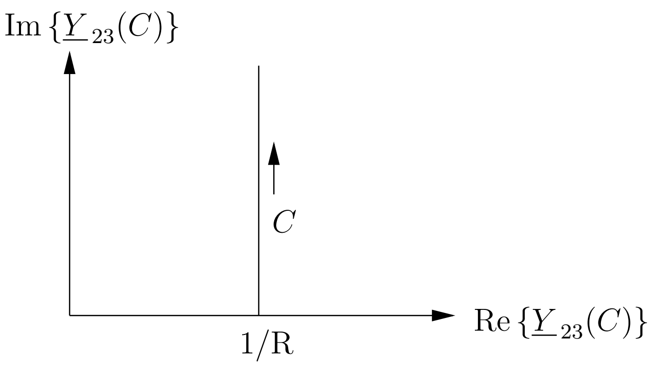




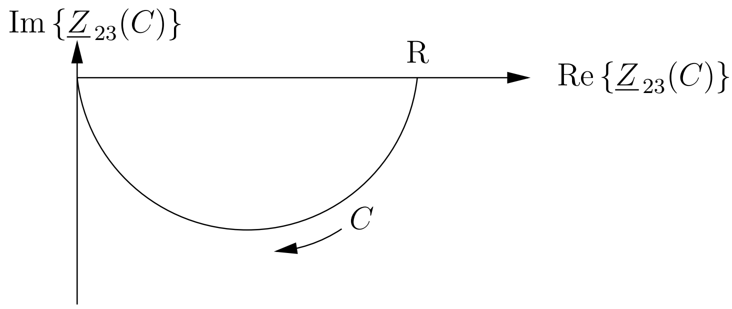
Impedanz der Gesamtschaltung für $C = C_1$ und L variabel:



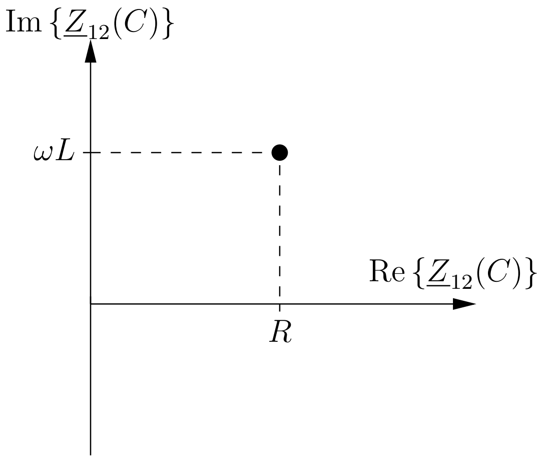
b) Admittanz der Parallelschaltung aus R und variablem C:



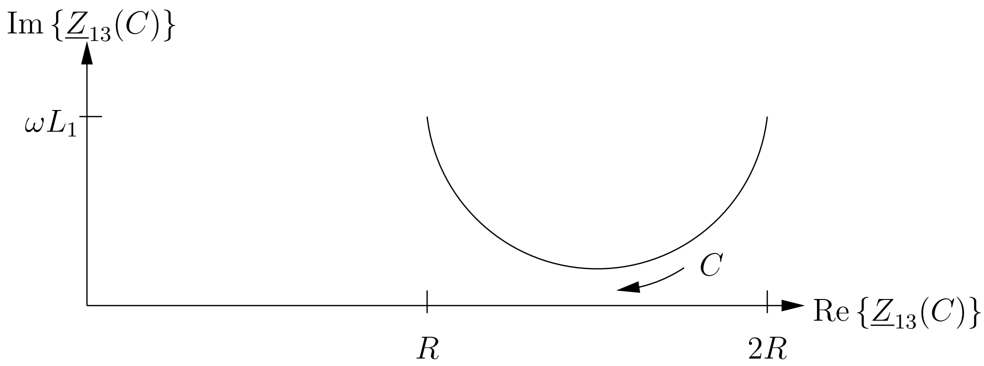
Inversion: Impedanz der Parallelschaltung aus R und variablem C:



Inversion: Impedanz der Reihenschaltung aus R und variablem L:



Impedanz der Gesamtschaltung für $L = L_1$ und C variabel:

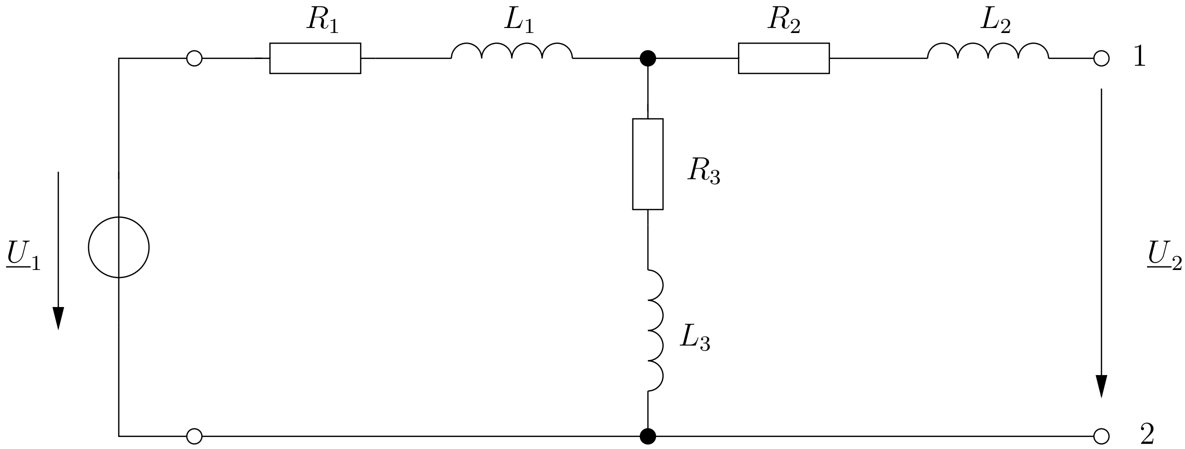


:

2.7 Bodediagramm

Aufgabe 51

Gegeben ist die folgende Schaltung:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{k} = \underline{U_2}/\underline{U_1}$ für den Fall, dass die Klemmen 1 und 2 offen sind.

b) Geben Sie die Eckfrequenzen des Bodedigramms für die folgenden Werte an: $R_1 = R_2 = R_3 = 75\Omega$, $L_1 = L_2 = 1425\,\mathrm{mH}$, $L_3 = 75\,\mathrm{mH}$.

c) Leiten Sie die Asymptoten für den Betragsfrequenzgang $k(\omega)$ und die Eckwerte für den Phasenfrequenzgang $\arg(\underline{k}(\omega))$ her.

d) Zeichnen sie das zugehörige Bodediagramm von $\underline{k}(\omega)$.

Lösung zu Aufgabe 51

a)

$$\begin{aligned}\underline{k} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_3 + \mathrm{j}\omega L_3}{(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1) + (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3)} = \frac{R_3 + \mathrm{j}\omega L_3}{R_1 + R_3 + \mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_3} \\ &= \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot \frac{1 + \mathrm{j}\omega \frac{L_3}{R_3}}{1 + \mathrm{j}\omega \frac{L_1 + L_3}{R_1 + R_3}}, \\ &= K \cdot \frac{1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}0}}\right)}{1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right)},\end{aligned} \tag{2.1}$$

mit

$$K = \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \tag{2.2}$$

$$\omega_{\mathrm{g}\infty} = \frac{R_1 + R_3}{L_1 + L_3}, \tag{2.3}$$

$$\omega_{\mathrm{g}0} = \frac{R_3}{L_3}. \tag{2.4}$$

b)

$$\omega_{\mathrm{g}\infty} = \frac{75\,\Omega + 75\,\Omega}{1425\,\mathrm{mH} + 75\,\mathrm{mH}} = 100\ \mathrm{Hz}, \tag{2.5}$$

$$\omega_{\mathrm{g}0} = \frac{R_3}{L_3} = \frac{75\,\Omega}{75\,\mathrm{mH}} = 1\ \mathrm{kHz}. \tag{2.6}$$

c) $\underline{k}(\omega) = K \cdot \underline{k}_0(\omega) \cdot \underline{k}_\infty(\omega)$ mit $\underline{k}_0(\omega) = 1 + \mathrm{j}\omega\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}0}}\right)$ und $\underline{k}_\infty(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right)}$

1. Betragsfrequenzgang: $k(\omega)/\mathrm{dB} = 20 \cdot \lg(K) + 20 \cdot \lg\left(k_0(\omega)\right) + 20 \cdot \lg\left(k_\infty(\omega)\right)$,

$$K/\mathrm{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -6\,\mathrm{dB},$$

$$k_0(\omega)/\mathrm{dB} = 20 \cdot \lg\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right)^2}\right),$$

$$k_\infty(\omega)/\mathrm{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}0}}\right)^2}}\right) = -20 \cdot \lg\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right)^2}\right).$$

2. Phasengang: $\varphi = \varphi_{k\infty} + \varphi_{k0}$

$$\varphi_{k_\infty} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right),$$

$$\varphi_{k_0} = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}0}}\right).$$

3. Konstruktion des Bodediagramms:
   - für die Knickfrequenzen gilt aus b.): $\omega_{\mathrm{g}0} = 10 \cdot \omega_{\mathrm{g}\infty}$
   - Asymptoten für $k(\omega)$

   <u>a.) $\omega < \omega_{\mathrm{g}\infty}$</u>

   $k_\infty(\omega) = k_0(\omega) = 20 \cdot \lg(1) = 0\,\mathrm{dB}$.

   <u>b.) $\omega_{\mathrm{g}\infty} < \omega < \omega_{\mathrm{g}0}$</u>

   $k_\infty(\omega) = 20 \cdot \lg\left(1/\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right)$, Steigung: –20 dB / Dekade,

   $k_0(\omega) = 20 \cdot \lg(1) = 0\mathrm{dB}$.

c.) $\omega > \omega_{\mathrm{g0}}$

$k_\infty(\omega) = -20 \cdot \lg\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}\right)$, Steigung: –20 dB / Dekade,

$k_0(\omega) = 20 \cdot \lg\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g0}}}\right)$, Steigung: 20 dB / Dekade,

$\Longrightarrow k(\omega)/\mathrm{dB} = K/\mathrm{dB} + k_\infty(\omega)/\mathrm{dB} + k_0(\omega)/\mathrm{dB}.$

- Eckwerte für φ_k

a.) $\omega \ll \omega_{\mathrm{g}\infty}$: $\varphi_\infty = \varphi_0 = 0°$,

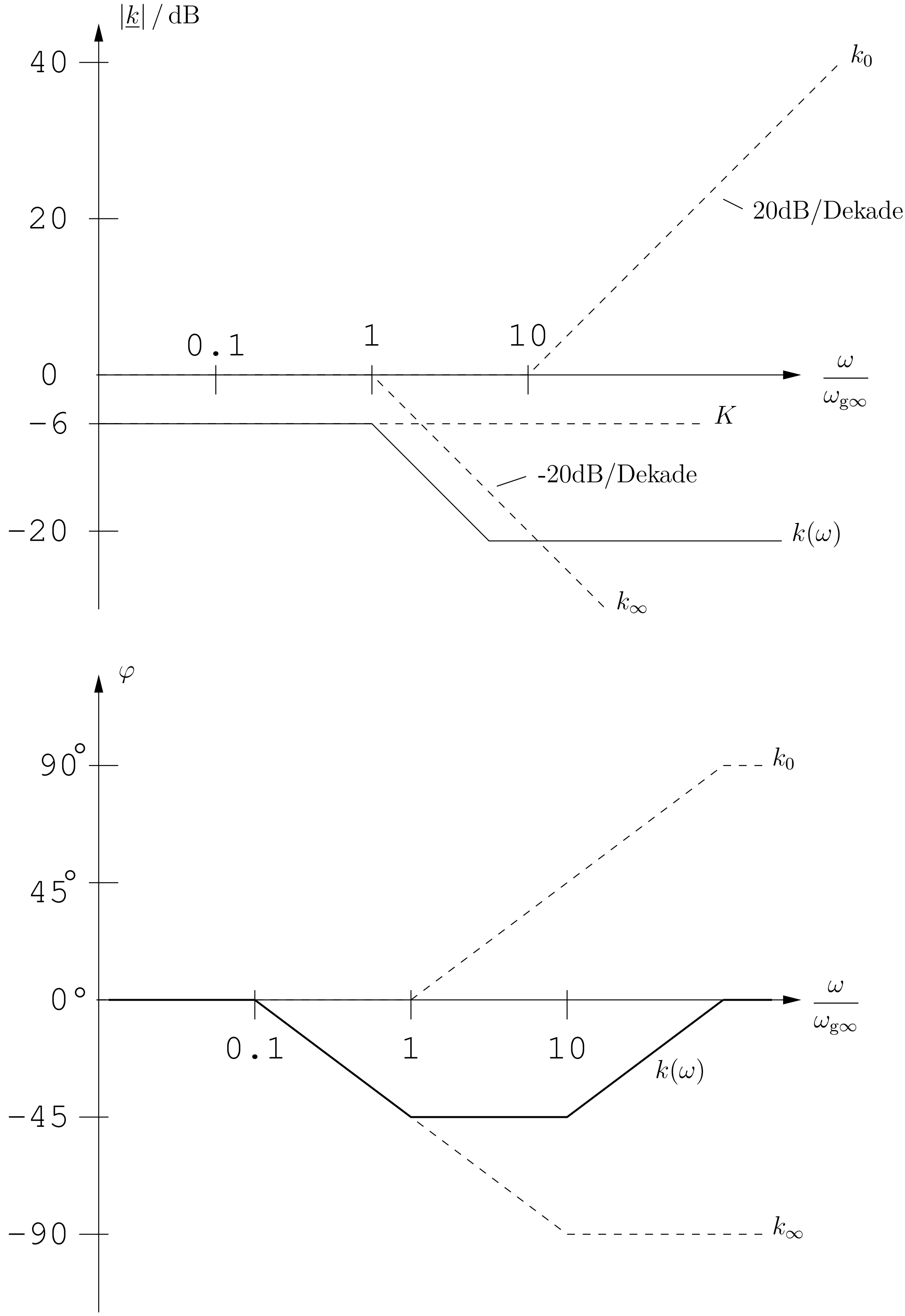
b.) $\omega = \omega_{\mathrm{g}\infty}$: $\varphi_\infty = -45°$, $\varphi_0 = 0°$, $\varphi = -45°$,

c.) $\omega = \omega_{\mathrm{g0}}$: $\varphi_\infty = -90°$, $\varphi_0 = 45°$, $\varphi = -45°$,

d.) $\omega \gg \omega_{\mathrm{g0}}$: $\varphi_\infty = -90°$, $\varphi_0 = -90°$, $\varphi = 0°$,

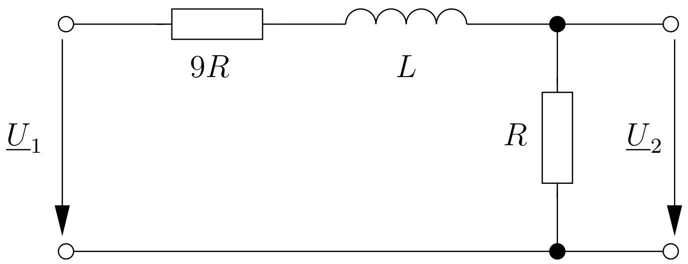
$\Longrightarrow \varphi = \varphi_\infty + \varphi_0.$

d) Darstellung Bodediagramm



Aufgabe 52

An den Eingang der folgenden Schaltung wird eine sinusförmige Wechselspannung $\underline{U}_1$ mit beliebiger Frequenz angeschlossen.



Zeichnen Sie das Bodediagramm der Übertragungsfunktion $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ und geben Sie die Grenzfrequenz(en) an.

Lösung zu Aufgabe 52

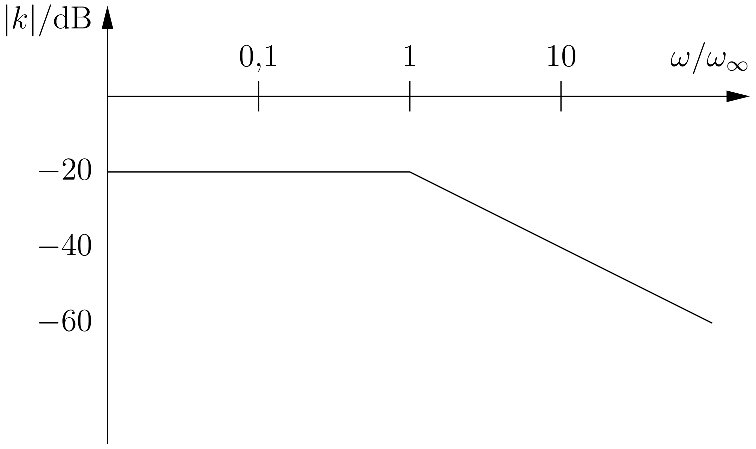
$$k(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{10R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega L/(10R)} = K \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega/\omega_\infty} = K \cdot k_\infty(\omega)$$

mit $K = 0{,}1$ und $\omega_\infty = 10R/L$.

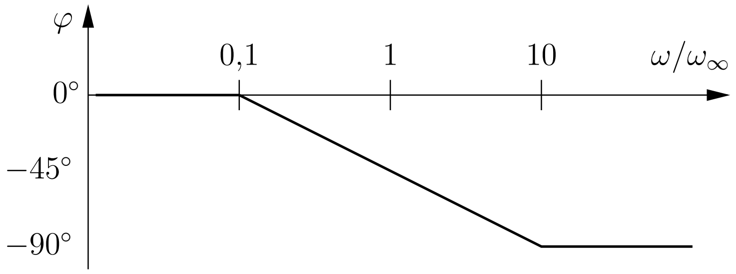
$$\begin{aligned} K/\mathrm{dB} &= 20\log(0{,}1) = -20, \\ k_\infty(\omega)/\mathrm{dB} &= 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_\infty)^2}}\right) \end{aligned}$$

Fallunterscheidung

$$\begin{array}{lll} \omega \ll \omega_\infty: & k_\infty(\omega)/\mathrm{dB} = 20\log(1) & = 0\,\mathrm{dB} \\ \omega = \omega_\infty: & k_\infty(\omega)/\mathrm{dB} = 20\log(1/\sqrt{2}) & = -3\,\mathrm{dB} \\ \omega \gg \omega_\infty: & k_\infty(\omega)/\mathrm{dB} = 20\log(\omega_\infty/\omega) & = -20\,\mathrm{dB/Dekade} \end{array}$$



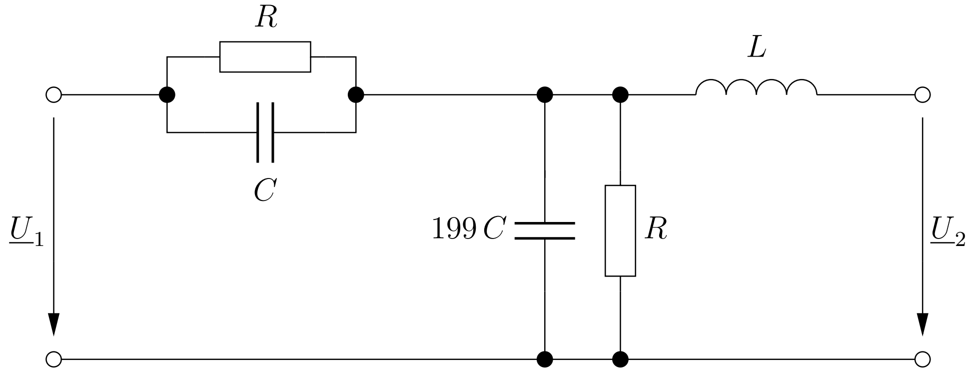
$|k|$/dB
0,1
1
10
ω/ω_∞
-20
-40
-60



φ
0,1
1
10
ω/ω_∞
0°
$-45°$
$-90°$

Aufgabe 53

Gegeben ist das folgende Filter mit bekannten Werten der Bauelemente:



a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ und geben Sie diese in Normalform an.

b) Geben Sie die Eckfrequenzen an.

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{\omega\to 0} G(\mathrm{j}\omega)$ und $\lim\limits_{\omega\to\infty} G(\mathrm{j}\omega)$.

d) Zeichnen Sie das vollständige Bodediagramm für $G(\mathrm{j}\omega)$ und geben Sie alle charakteristischen Größen an.

e) Bestimmen Sie, bei welcher Frequenz ω' eine Änderung der Übertragungsfunktion $G(\mathrm{j}\omega')$ gegenüber $G(\mathrm{j}0)$ um 20 dB zu erwarten ist.

Lösung zu Aufgabe 53

a) Für die Parallelschaltung aus R und C gilt:

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega CR}.$$

$$\begin{aligned}
G(\mathrm{j}\omega) &= \frac{\frac{R}{1+\mathrm{j}199\omega CR}}{\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega 199CR} + \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}}, \\
&= \frac{\frac{R}{1+\mathrm{j}199\omega CR}}{\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega 199CR} + \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR}}, \\
&= \frac{\frac{1}{1+\mathrm{j}199\omega CR}}{\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega 199CR} + \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR}}, \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1+\mathrm{j}199\omega CR}{1+\mathrm{j}\omega CR}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{1+\mathrm{j}\omega RC+1+\mathrm{j}199\omega CR}{1+\mathrm{j}\omega CR}}, \\
&= \frac{1+\mathrm{j}\omega CR}{2+\mathrm{j}200\omega CR}, \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mathrm{j}\omega CR}{1+\mathrm{j}100\omega CR}, \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}0}}}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}}.
\end{aligned}
$$

b) Für die Eckfrequenzen liest man ab:

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{g}0} &= \frac{1}{C\cdot R}, \\
\omega_{\mathrm{g}\infty} &= \frac{1}{100\cdot C\cdot R}, \\
&\Rightarrow \omega_{\mathrm{g}0} = 100\cdot\omega_{\mathrm{g}\infty},
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
G(\mathrm{j}\omega=0) &= 0.5 \mathrel{\widehat{=}} -6\mathrm{dB}, \\
G(\mathrm{j}\omega\to\infty) &= 1/200 \mathrel{\widehat{=}} -46\mathrm{dB}.
\end{aligned}
$$

d)
Wir zerlegen die Übertragungsfungktion:

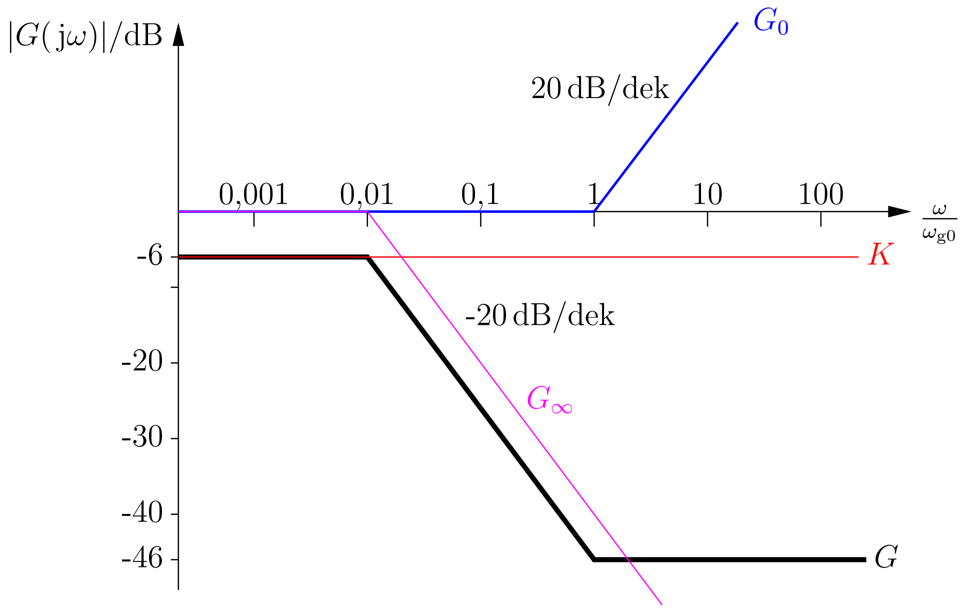
$$
\begin{aligned}
G(\mathrm{j}\omega) &= K\cdot G_0\cdot G_\infty, \\
\text{mit } K &= \frac{1}{2}, \\
G_0 &= 1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}0}}, \\
G_\infty &= \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{g}\infty}}},
\end{aligned}
$$

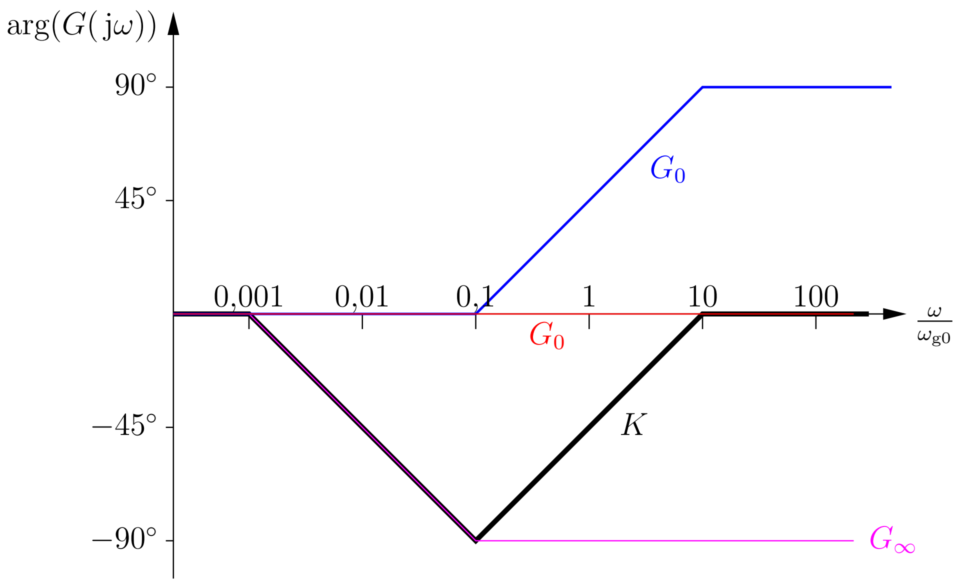
$$
\begin{aligned}
|K| &= \frac{1}{2} \mathrel{\widehat{=}} 20\cdot\log(1/2)\,\mathrm{dB} = -6\,\mathrm{dB}, \\
\arg(K) &= 0^\circ. \\
|G_0| &= \begin{cases} 1 & \mathrel{\widehat{=}}\ 0\,\mathrm{dB} & ,\ \omega \ll \omega_{\mathrm{g}0} \\ \sqrt{2} & \mathrel{\widehat{=}}\ 3\,\mathrm{dB} & ,\ \omega = \omega_{\mathrm{g}0} \\ \text{linear steigend} & \mathrel{\widehat{=}}\ 20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}} & ,\ \omega > \omega_{\mathrm{g}0} \end{cases} \\
\arg(G_0) &= \begin{cases} 0^\circ & ,\ \omega \ll \omega_{\mathrm{g}0} \\ 45^\circ & ,\ \omega = \omega_{\mathrm{g}0} \\ 90^\circ & ,\ \omega \gg \omega_{\mathrm{g}0} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$|G_\infty| = \begin{cases} 1 & \widehat{=} \; 0\,\text{dB} & , \; \omega \ll \omega_{g\infty} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \widehat{=} \; -3\,\text{dB} & , \; \omega = \omega_{g\infty} \\ \text{linear fallend} & \widehat{=} \; -20\frac{\text{dB}}{\text{Dekade}} & , \; \omega > \omega_{g\infty} \end{cases}$$

$$\arg(G_\infty) = \begin{cases} 0^\circ & , \; \omega \ll \omega_{g\infty} \\ -45^\circ & , \; \omega = \omega_{g\infty} \\ -90^\circ & , \; \omega \gg \omega_{g\infty} \end{cases}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind im folgenden Bild nur die Tangenten der Übertragungsfunktionen eingezeichnet.

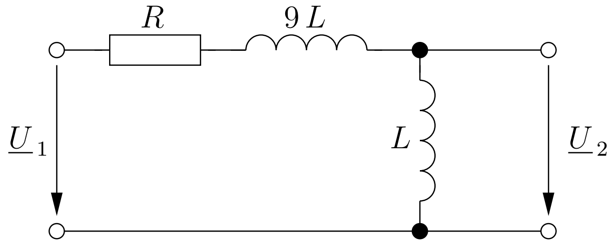




e) Bei $\omega = 10 \cdot \omega_{g\infty}$ ist $G(\,j\omega) = -26\text{dB}$.

Aufgabe 54

Gegeben ist die folgende Schaltung:



Zeichnen Sie das Bodediagramm (Betrags-und Phasenfrequenzgang) der Übertragungsfunktion $\underline{k}(\mathrm{j}\,\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ und geben Sie die Eckfrequenz(en) an.

Lösung zu Aufgabe 54

$$\underline{k} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega 10L} = \frac{\mathrm{j}\,\omega \cdot \frac{L}{R}}{1 + \mathrm{j}\,\omega \cdot \frac{10\,L}{R}} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{10\,\omega_g}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_g}}.$$

$$\omega_g = \frac{R}{10L}.$$

$$\underline{k} = \underline{k}_0 \cdot \underline{k}_\infty$$

$$\text{mit: } \underline{k}_0 = \mathrm{j}\frac{\omega}{10\,\omega_g}$$

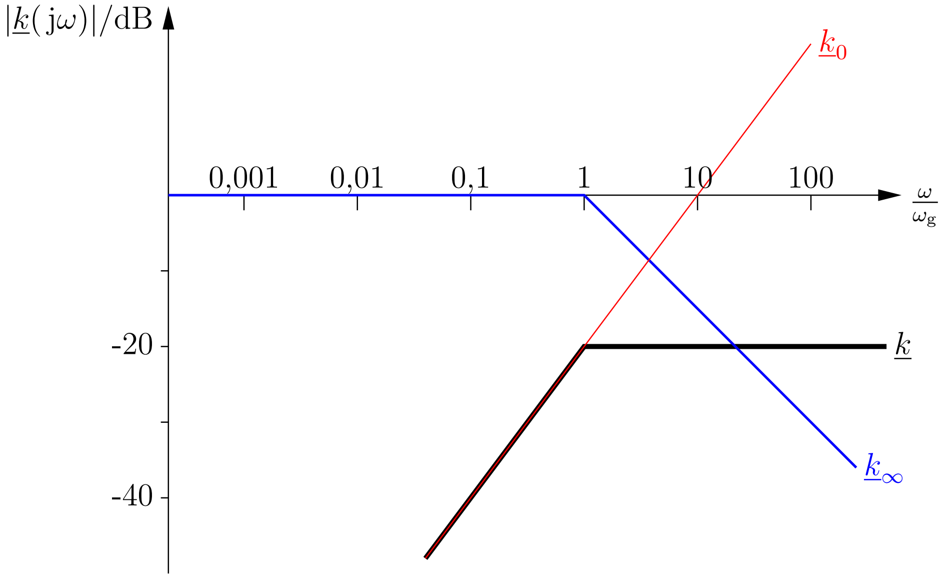
$$\underline{k}_\infty = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_g}}$$

$$|\underline{k}_0| = \begin{cases} \text{linear steigend} & \hat{=}\ 20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}} \\ 1 & \hat{=}\ 0\mathrm{dB} \qquad , \ \omega = 10\omega_{\mathrm{g}}. \end{cases}$$

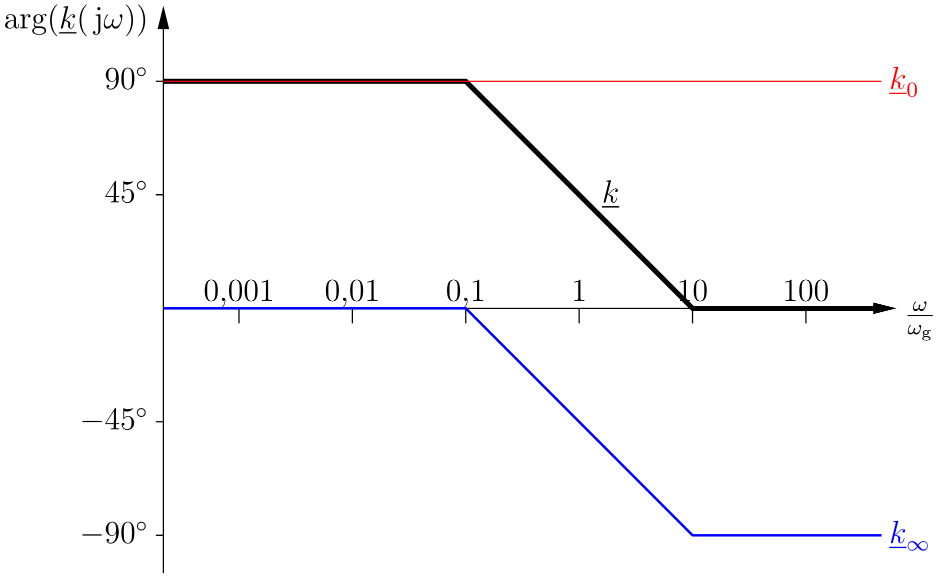
$$\arg(\underline{k}_0) = 90^\circ$$

$$|\underline{k}_\infty| = \begin{cases} 1 & \hat{=}\ 0\,\mathrm{dB} & , \ \omega \ll \omega_{\mathrm{g}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \hat{=}\ -3\,\mathrm{dB} & , \ \omega = \omega_{\mathrm{g}} \\ \text{linear fallend} & \hat{=}\ -20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}} & , \ \omega > \omega_{\mathrm{g}} \end{cases}$$

$$\arg(\underline{k}_\infty) = \begin{cases} 0^\circ & , \ \omega \ll \omega_{\mathrm{g}} \\ -45^\circ & , \ \omega = \omega_{\mathrm{g}} \\ -90^\circ & , \ \omega \gg \omega_{\mathrm{g}} \end{cases}$$



$|\underline{k}(\mathrm{j}\omega)|/\mathrm{dB}$
$\underline{k}_0$
0,001
0,01
0,1
1
10
100
$\frac{\omega}{\omega_g}$
-20
$\underline{k}$
-40
$\underline{k}_\infty$



$\arg(\underline{k}(\mathrm{j}\omega))$
90°
$\underline{k}_0$
45°
$\underline{k}$
0,001
0,01
0,1
1
10
100
$\frac{\omega}{\omega_g}$
−45°
−90°
$\underline{k}_\infty$

2.8 Fourierreihe

Aufgabe 55

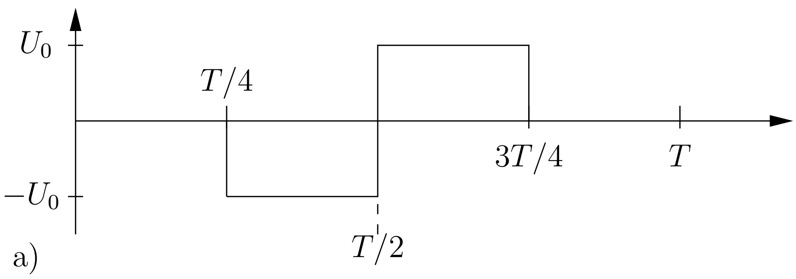
Eine periodisch zeitabhängige Spannung $u(t)$ mit der Periodendauer T ist gegeben:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < t < T/4, \\ -U_0 & \text{für} \quad T/4 < t < T/2, \\ +U_0 & \text{für} \quad T/2 < t < 3T/4, \\ 0 & \text{für} \quad 3T/4 < t < T. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf von $u(t)$ im Intervall $0 < t < T$.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourierreihe von $u(t)$ in Abhängigkeit von den gegebenen Größen U_0 und T.

Lösung zu Aufgabe 55



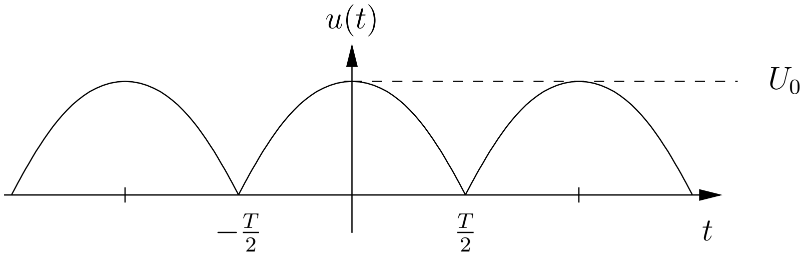
a)

b) Es handelt sich um eine mittelwertfreie Funktion: $a_0 = 0$.
Die Funktion ist ungerade. Daher fallen die Koeffizienten der Kosinusterme weg.
Für die anderen gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_0^T (u(t)\sin(n\omega t))\,\mathrm{d}t = \frac{2U_0}{T}\left(-\int\limits_{T/4}^{T/2}\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{T/2}^{3T/4}\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\right), \\ &= \frac{2\,U_0}{T}\left(-\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/4}^{T/2} + \left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/2}^{3T/4}\right), \\ &= \frac{2\,U_0}{nT\omega}\left(\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2) - \cos(n3\pi/2) + \cos(n\pi)\right), \\ &= \frac{4\,U_0}{nT\omega}\left(\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 56

Eine Spannungsquelle liefert die unten skizzierte periodische Ausgangsspannung $u(t)$:

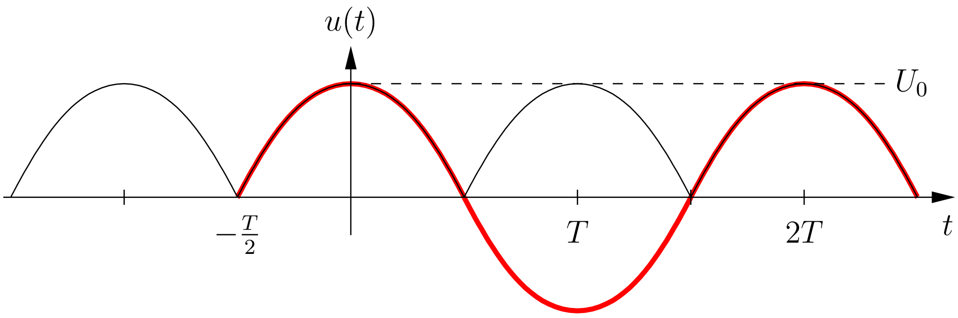


Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourierreihe von $u(t)$.

Hinweis:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Lösung zu Aufgabe 56



Die Funktion lässt sich mathematisch folgendermaßen darstellen:

$$u(t) = U_0 \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} t\right) \quad \text{, für} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}.$$

Es handelt sich um eine gerade Funktion. Damit fallen alle Koeffizienten der Sinusterme weg. Die weiteren Koeffizienten berechnet man zu:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t)\,\mathrm{d}t$$

Da es sich um eine gerade Funktion handelt, genügt es, über die halbe Periode zu integrieren und das Ergebnis mit zwei zu multiplizieren.

$$= \frac{4}{T} \int\limits_{0}^{T/2} U_0 \cos\left(\frac{\pi}{T} t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{4U_0}{T} \left[\frac{T}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T} t\right)\right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{2U_0}{\pi}\left(\sin(\pi/2) - 0)\right) = \frac{4U_0}{\pi}.$$

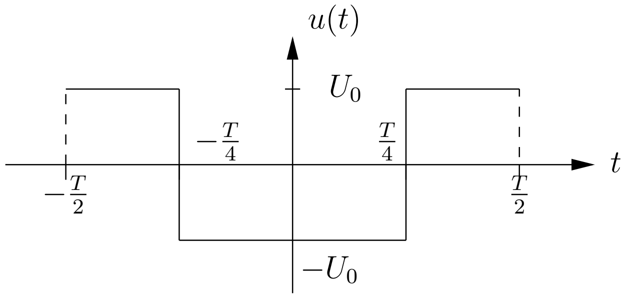
$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos\left(n\frac{\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t$$

Da es sich um eine gerade Funktion handelt, genügt es, über die halbe Periode zu integrieren und das Ergebnis mit zwei zu multiplizieren.

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{T}\int\limits_{0}^{T/2} U_0\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4U_0}{T}\int\limits_{0}^{T/2} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{T}t - n\frac{2\pi}{T}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{T}t + n\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2U_0}{T}\int\limits_{0}^{T/2} \left(\cos\left((1-2n)\frac{\pi}{T}t\right) + \cos\left((1+2n)\frac{\pi}{T}t\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2U_0}{T}\left[\frac{T}{(1-2n)\pi}\sin\left((1-2n)\frac{\pi}{T}t\right) + \frac{T}{(1+2n)\pi}\sin\left((1+2n)\frac{\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2} \\
&= 2U_0\left(\frac{1}{(1-2n)\pi}\sin\left((1-2n)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{(1+2n)\pi}\sin\left((1+2n)\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 2U_0\left(\frac{1}{(1-2n)\pi}(-1^n) + \frac{1}{(1+2n)\pi}(-1^n)\right) \\
&= \frac{2U_0}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{(1-2n)} + \frac{1}{(1+2n)}\right) \\
&= \frac{4U_0(-1)^n}{\pi(1-(4n)^2)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 57

Eine periodisch zeitabhängige Spannung $u(t)$ mit der Periodendauer T ist gegeben:



a) Welche Symmetrieeigenschaften weist die Spannung $u(t)$ auf?

b) Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourierreihe von $u(t)$.

Lösung zu Aufgabe 57

Ansatz:

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)\right), \quad \omega = (2\pi)/T.$$

Der Gleichanteil ist Null, d.h. $a_0 = 0$. Die Vorfaktoren b_m vor den Sinusfunktionen werden Null, da die Vorgabefunktion **gerade** ist:

$$b_m = 0.$$

Es gilt: $u(t) = -u(t + T/2)$, d.h. $a_{2k} = 0$.
Die verbleibenden Koeffizienten erhält man durch Integration

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \left(\cos(m\omega t) u(t)\right) \mathrm{d}t, \\
&= -\frac{4U_0}{T} \left(\int\limits_{0}^{T/4} \cos(m\omega t)\, \mathrm{d}t - \int\limits_{T/4}^{T/2} \cos(m\omega t)\, \mathrm{d}t \right), \\
&= -\frac{4U_0}{T} \left(\left[\frac{\sin(m\omega t)}{m\omega}\right]_{t=0}^{t=T/4} - \left[\frac{\sin(m\omega t)}{m\omega}\right]_{t=T/4}^{t=T/2} \right), \\
&= -\frac{4U_0}{mT\omega} \left(\sin(m\omega T/4) - 0 - \sin(m\omega T/2) + \sin(m\omega T/4)\right), \\
&= -\frac{2U_0}{m\pi} \left(2\sin(m\pi/2) - \underbrace{\sin(m\pi)}_{=0} \right), \\
&= -\frac{4U_0}{m\pi} \sin(m\pi/2).
\end{aligned}$$

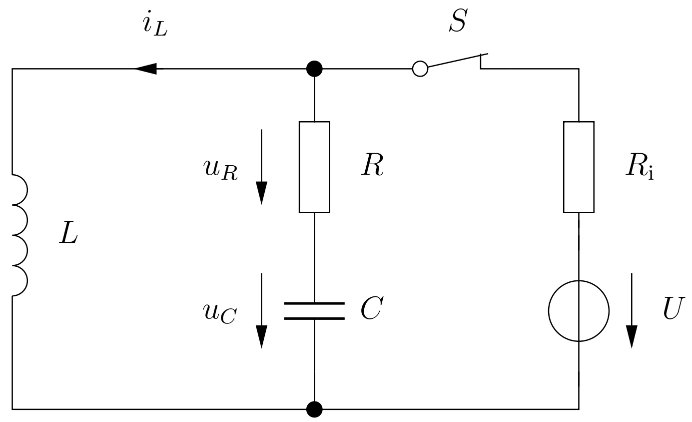
Endergebnis:

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = -\frac{4U_0}{(2k+1)\pi}\,(-1)^k \quad \text{mit } k = 0{,}1{,}2{,}3,\ldots$$

2.9 Laplacetransformation

Aufgabe 58

Für $t < 0$ sind alle Ströme und Spannungen in dem skizzierten Netzwerk zeitlich konstant. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geöffnet.



a) Bestimmen Sie die Spannung u_C und den Strom i jeweils für $t = 0$ und $t \to \infty$.

b) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $I(s)$ des Stromes $i(t)$.

c) Bestimmen Sie anhand $I(s)$, für welche Werte der Bauelemente der Schwingfall, der Kriechfall und der aperiodische Grenzfall auftreten.

d) Berechnen Sie $u_R(t)$ für den aperiodischen Grenzfall.

Lösung zu Aufgabe 58

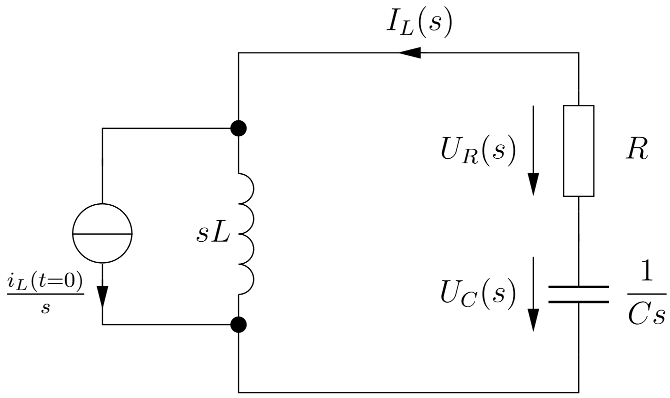
a)
Anfangswerte:
Im statischen Zustand für $t < 0$ verhalten sich die Induktivität wie ein Kurzschluss und die Kapazität wie ein Leerlauf. Außerdem können sich an der Induktivität der Strom und an der Kapazität die Spannung nicht sprunghaft ändern. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} i(t=0) &= \frac{U}{R_\mathrm{i}}, \\ u_C(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

Endwerte:

$$\begin{aligned} i(t=\infty) &= 0, \\ u_C(t=\infty) &= 0. \end{aligned}$$

b)



$I(s)$ lässt sich über den Stromteiler berechnen:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{i(t=0)}{s}\frac{sL}{sL+R+\frac{1}{sC}} \\ &= i(t=0)\frac{L}{sL+R+\frac{1}{sC}} \\ &= i(t=0)\frac{1}{s+\frac{R}{L}+\frac{1}{sCL}} \\ &= i(t=0)\frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{CL}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} I(s) &= i(t=0)\cdot\frac{s}{s^2+\frac{R}{L}\cdot s+\frac{1}{CL}} \\ &= i(t=0)\cdot\frac{s}{s^2+2\cdot\delta\cdot s+\omega_0^2}\text{, bzw. mit}\,\omega_0^2=\omega^2+\delta^2: \\ &= \begin{cases} i(t=0)\cdot\frac{s}{s^2+2\cdot\delta\cdot s+\omega^2+\delta^2} & \text{für}\quad \omega_0>\delta, \text{(Schwingfall)} \\ i(t=0)\cdot\frac{s}{(s+\delta)^2} & \text{für}\quad \omega_0=\delta, \text{(aper. Grenzfall),} \\ i(t=0)\cdot\frac{s}{(s+a)(s+b)} & \text{für}\quad \omega_0<\delta, \text{(Kriechfall).} \end{cases} \end{aligned}$$

mit

$$\delta=\frac{R}{2L},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},s_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,.$$

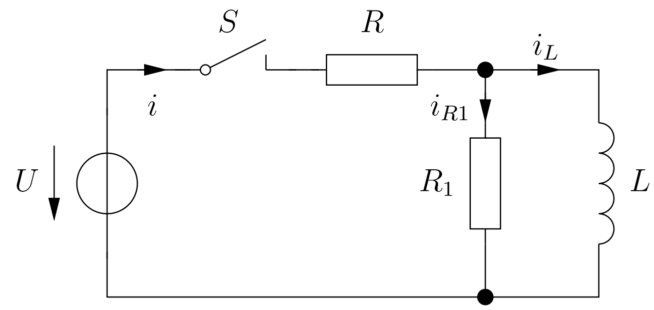
e)

aperiodischer Grenzfall $\omega_0 = \delta$:

$$\begin{aligned}
I(s) &= I_0 \cdot \frac{s}{(s+\delta)^2} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{R}{2 \cdot L}\,, \\
i &= i(t=0) \cdot \left(1 - \frac{R}{2 \cdot L} \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2 \cdot L} \cdot t}\,, \\
&= \frac{U}{R_\mathrm{i}} \cdot \left(1 - \frac{R}{2 \cdot L} \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2 \cdot L} \cdot t}\,, \\
u_R &= -R \cdot i_L = U \cdot \frac{R}{R_\mathrm{i}} \cdot \left(1 - \frac{R}{2 \cdot L} \cdot t\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{2 \cdot L} \cdot t}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 59

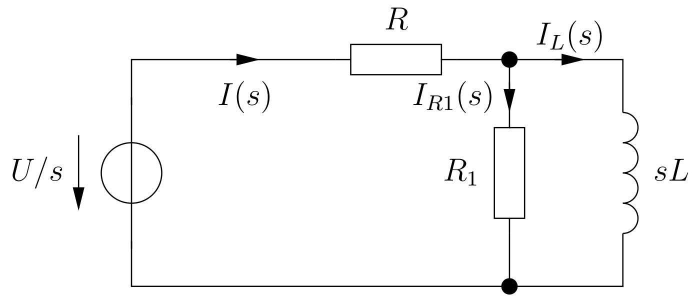
Eine Gleichspannungsquelle wird über einen zunächst geöffneten Schalter S mit einer Schaltung aus den Widerständen R und R_1 sowie der Induktivität L verbunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen.



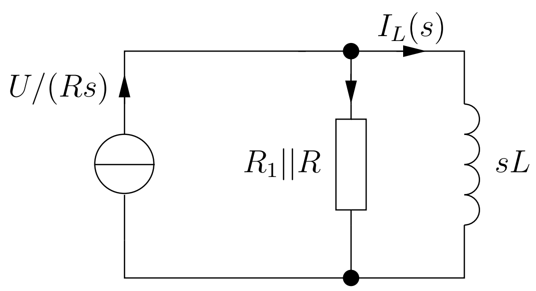
Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes i_L mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung zu Aufgabe 59

Nach Schließen des Schalters und Umzeichnen erhält man:



Umwandeln der Spannungs- in eine Stromquelle liefert:



Aus dieser Schaltung kann durch Anwenden der Stromteilerregel der gesuchte Strom berechnet werden:

$$\begin{aligned}
I_L(s) &= \frac{U}{Rs}\frac{R||R_1}{Ls+R||R_1} \\
&= \frac{U}{Rs}\frac{\overbrace{\frac{R\cdot R_1}{R+R_1}}^{R'}}{Ls+\underbrace{\frac{R\cdot R_1}{R+R_1}}_{R'}} \\
&= \frac{UR'}{LR}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{R'}{L}\right)} \\
&= b\cdot\frac{1}{s(s+a)} \qquad \text{mit: } b=\frac{UR'}{LR},\quad a=\frac{R'}{L}
\end{aligned}$$

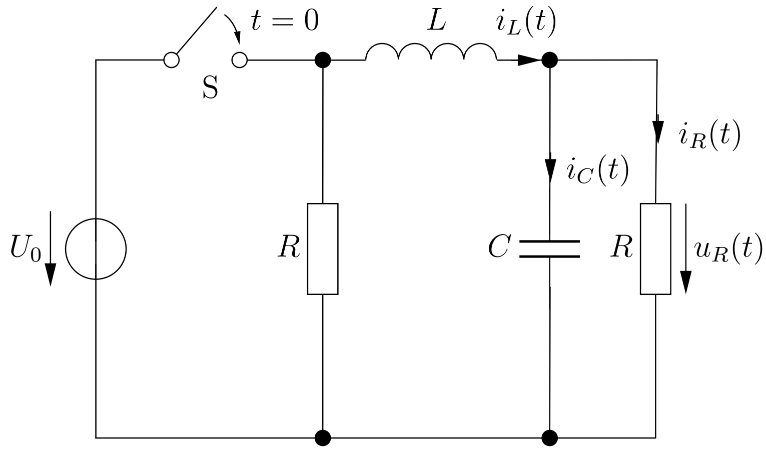
Rücktransformation ergibt:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{b}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right), \\
&= \frac{U}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{R'/L}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 60

Gegeben ist die folgende Schaltung, für deren Bauelemente gilt:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}.$$



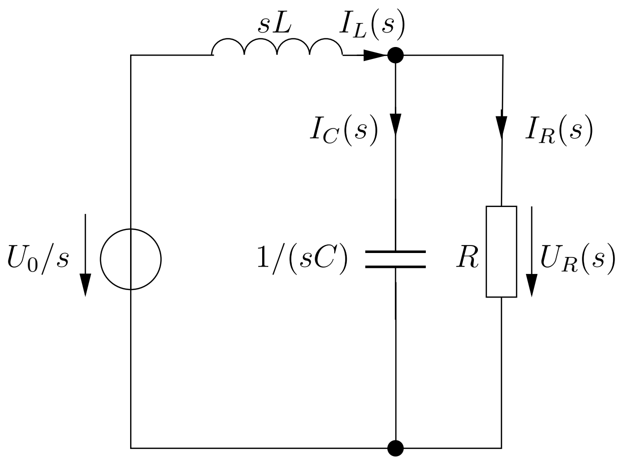
Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen.

a) Geben Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{u_R(t)\}$ an.

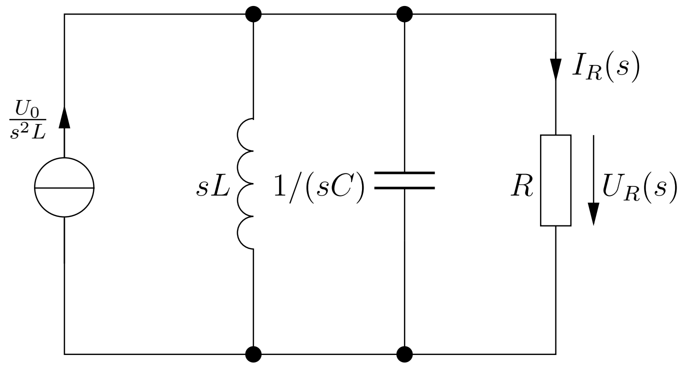
b) Bestimmen die die Spannung $u_R(t)$.

Lösung zu Aufgabe 60

a) Der linke Widerstand kann nach Schließen des Schalters vernachlässigt werden. Er liegt parallel zu einer idealen Spannungsquelle und hat keine Auswirkungen auf den Rest der Schaltung.



Die ideale Spannungsquelle kann zusammen mit der Induktivität als reale Spannungsquelle angesehen werden und in eine reale Stromquelle umgewandelt werden:



Den Strom durch den Widerstand lässt sich mit der Stromteilerregel berechnen:

$$
\begin{aligned}
sL \parallel \frac{1}{sC} &= \frac{1}{\frac{1}{sL} + sC} \\
I_R(s) &= \frac{U_0}{s^2 L} \cdot \frac{\frac{1}{\frac{1}{sL}+sC}}{\frac{1}{\frac{1}{sL}+sC} + R} \\
&= \frac{U_0}{s^2 L} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{sL} + sCR} \\
&= \frac{U_0}{sL} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L} + s^2 CR} \\
&= \frac{U_0}{sLCR} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \\
U_R(s) &= I_R(s) \cdot R \\
&= \frac{U_0}{sLC} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \\
\text{mit:} \quad R &= \frac{1}{2}\sqrt{L/C} \quad \text{(siehe Aufgabenstellung)} \\
U_R(s) &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{1}{C \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}s + \frac{1}{LC}\right)} \\
&= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s\left(s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{LC}}s + \frac{1}{LC}\right)} \\
&= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s\left(s^2 + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2} \\
&= a^2 U_2 \cdot \frac{1}{s(s+a)^2} \quad \text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}
$$

b)

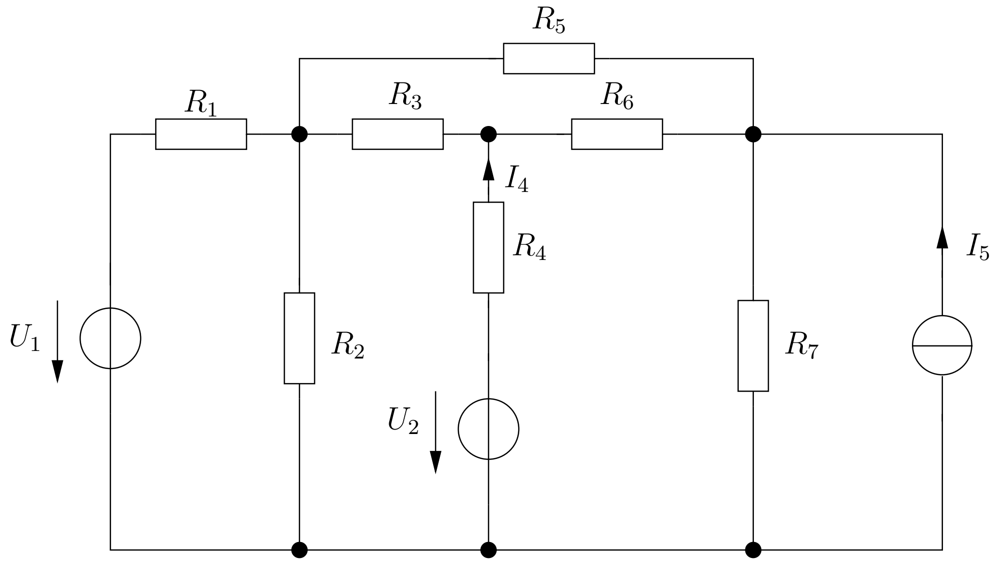
$$\frac{1}{s(s+a)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{a^2}\left(1-(1+at)\,\mathrm{e}^{-at}\right)$$

$$u_R(t) = U_0\left(1-(1+at)\cdot\,\mathrm{e}^{-at}\right) = U_0\left(1-\left(1+\frac{t}{\sqrt{L\,C}}\right)\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{L\,C}}}\right)$$

2.10 Knotenpotentialverfahren

Aufgabe 61

Das folgende Netzwerk soll mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens analysiert werden.



a) Formen Sie die Schaltung so um, dass Sie das Knotenpotentialverfahren anwenden können.

b) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Knotenpotentiale auf.

Es gilt nun für die Quellen:

$$U_1 = 2\,\mathrm{V}, U_2 = \frac{2}{3}\,\mathrm{V}, \quad I_5 = 1/3\,\mathrm{A}$$

und die Widerstände:

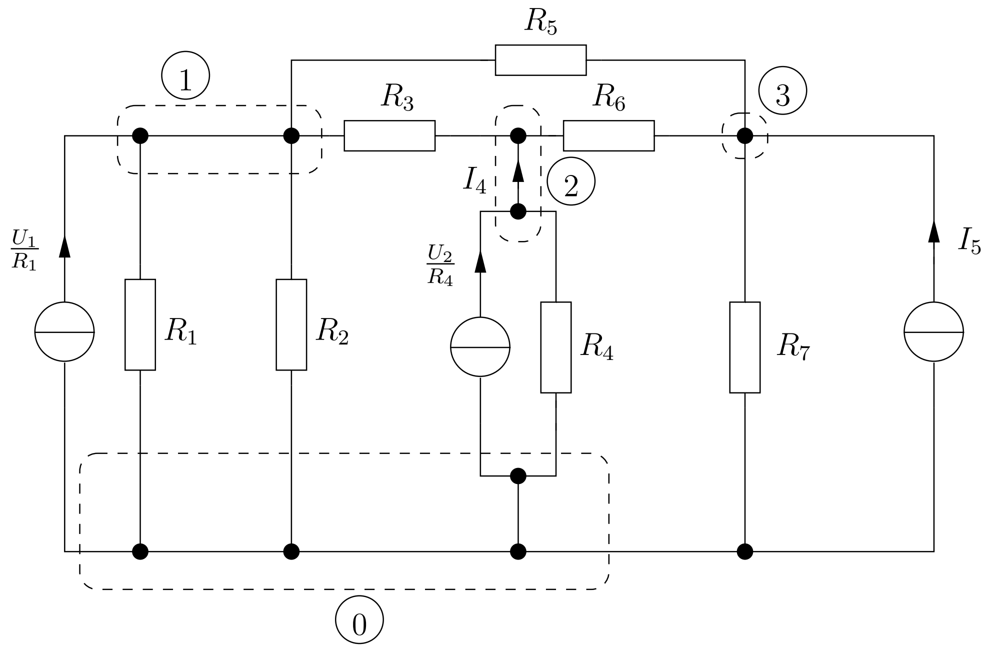
$$R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = R_7 = 2R \quad \text{und} \quad R_3 = R_5 = R.$$

mit $R = 1\Omega$.

c) Berechnen den Strom I_4 mit dem Knotenpotentialverfahren.

Lösung zu Aufgabe 61

a)
1. Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umwandeln
2. Knoten des Netzwerkes bezeichnen und Bezugsknoten (= Knoten 0) festlegen



b)

- Eintragen der Leitwerte in die Zellen
  - wenn Zeilennummer = Spaltennummer → Summe aller Leitwerte am betreffenden Knoten eintragen
  - wenn Zeilennummer ≠ Spaltennummer → alle Leitwerte zwischen den betreffenden Knoten mit negativen Vorzeichen eintragen
- Eintragen der Quellströme am Knoten (positiv wenn sie hineinfließen und negativ wenn sie herausfließen)

Damit ergibt sich folgende Form:

$$G \cdot U = I_Q \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{R_1} \\ \frac{U_2}{R_4} \\ I_5 \end{pmatrix}$$

c)
1. Ansatz für den gesuchten Strom ist: $I_4 = -\frac{U_2 - U_{20}}{R_4}$
2. Lösen der Matrix nach U_{20}

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R} & -\frac{1}{2R} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{2R} & \frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{2R} \\ \frac{U_2}{2R} \\ I_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{2} \\ \frac{U_2}{2} \\ I_5 \cdot R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{2} \\ \frac{3U_2}{2}+\frac{U_1}{2} \\ 3I_5 \cdot R + \frac{U_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{2} \\ \frac{3U_2}{2}+\frac{U_1}{2} \\ 3I_5 \cdot R + \frac{3U_1}{2} + 3U_2 \end{pmatrix}$$

3. Berechnung $U_{20} \rightarrow I_4$

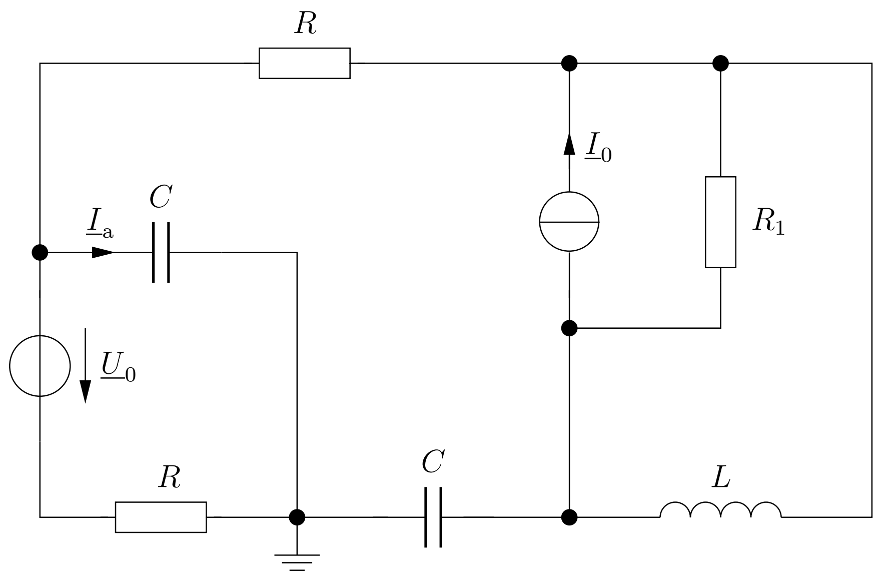
$$\begin{aligned} \frac{15}{2}U_{20} &= 3I_5 \cdot R + \frac{3U_1}{2} + 3U_2 \\ \Rightarrow U_{20} &= \frac{2}{15}\left(3I_5 \cdot R + \frac{3U_1}{2} + 3U_2\right) \\ &= \frac{2}{15}\left(3\frac{1}{3}\,\mathrm{A} \cdot 1\Omega + \frac{3 \cdot 2\,\mathrm{V}}{2} + 3\frac{2}{3}\,\mathrm{V}\right) \\ &= \frac{4}{5}\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$I_4 = -\frac{U_2 - U_{20}}{R_4} = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)\,\mathrm{A} = -\frac{1}{15}\,\mathrm{A}. \tag{2.8}$$

Aufgabe 62

Das folgende Netzwerk soll mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens untersucht werden.



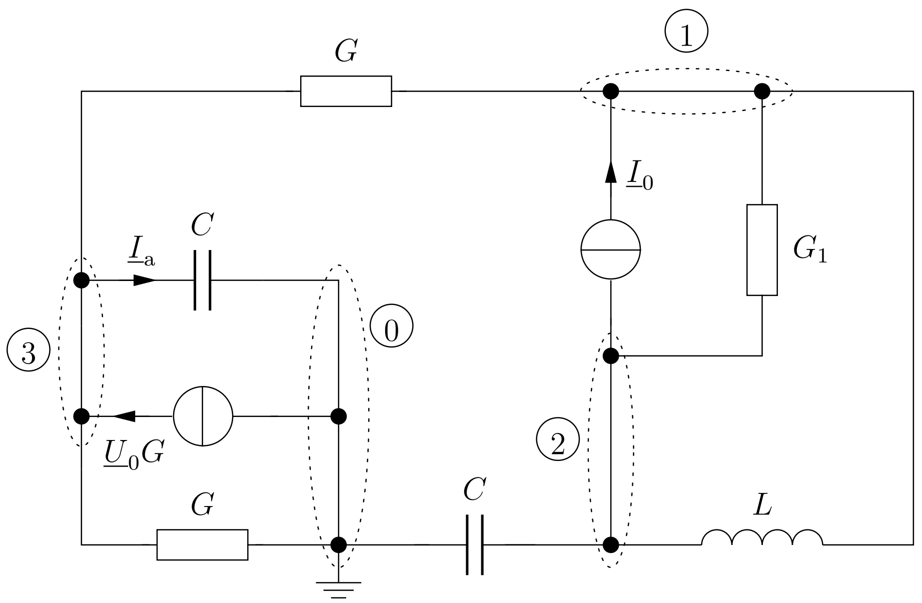
a) Stellen Sie eine Matrixgleichung zur Berechnung der Knotenpotentiale auf.

Es gilt nun: $R_1 = \infty, \quad R = \omega L = 1/(\omega C)$.

b) Berechnen Sie den Strom $\underline{I}_\text{a}$.

Lösung zu Aufgabe 62

Umwandeln der Spannungsquelle in eine Stromquelle und Nummerieren der Knoten ergibt:



Aufstellen der Matrix:

$$\begin{pmatrix} G+G_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & -G_1-\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & -G \\ -G_1-\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & G_1+\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} & 0 \\ -G & 0 & 2G+\mathrm{j}\omega C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ -\underline{I}_0 \\ \underline{U}_0 G \end{pmatrix}$$

Mit den gegebenen Vereinfachungen erhält man:

$$G \begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} & \mathrm{j} & -1 \\ \mathrm{j} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2+\mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_0 \\ -\underline{I}_0 \\ \underline{U}_0 G \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile läßt sich $\underline{U}_{10}$ direkt berechnen:

$$\underline{U}_{10} = \mathrm{j}\underline{I}_0/G.$$

Die Lösung für $\underline{U}_{10}$ wird in die dritte Zeile des LGS eingesetzt:

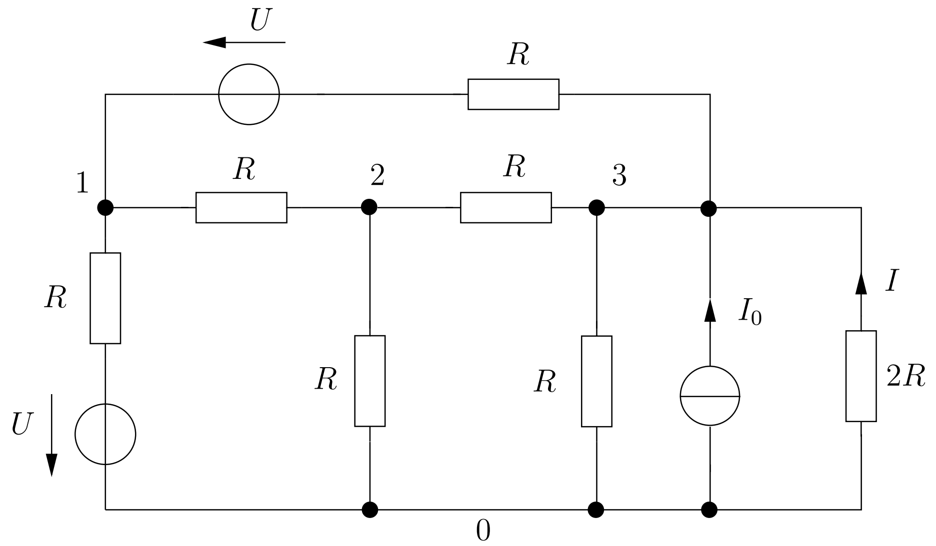
$$\underline{U}_{30} = \frac{\underline{U}_0 + \underline{U}_{10}}{2\,\mathrm{j}} = \frac{\underline{I}_0}{2} - \mathrm{j}\frac{\underline{U}_0}{2}.$$

Damit gilt für für den gesuchten Strom:

$$\underline{I}_\mathrm{a} = \underline{U}_{30}\,\mathrm{j}\omega C.$$

Aufgabe 63

Das folgende Netzwerk soll mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens analysiert werden.



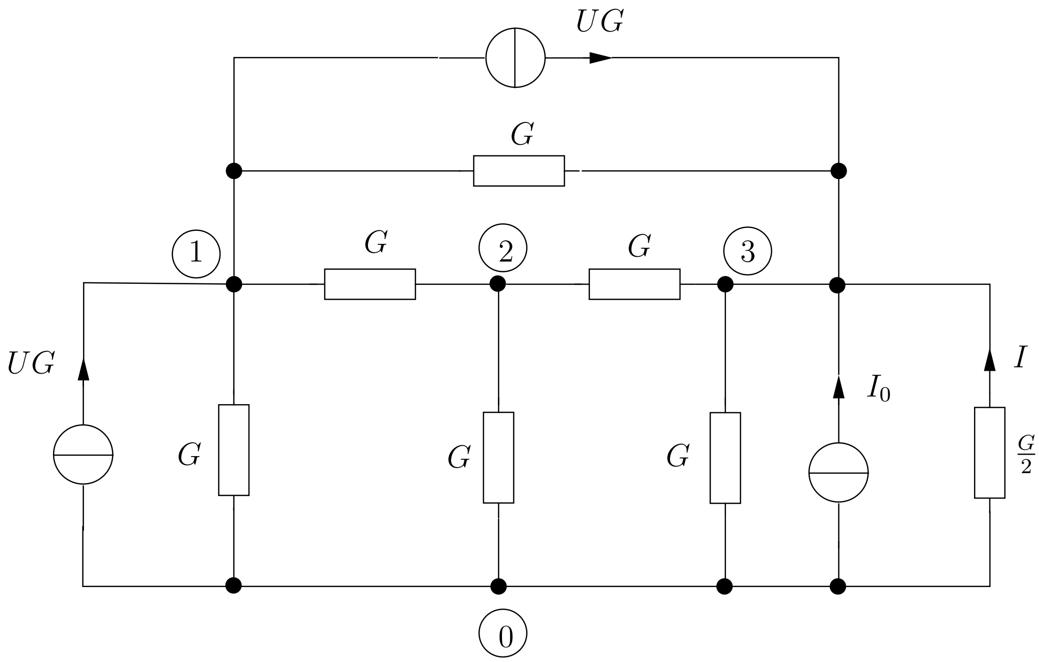
a) Formen Sie die Schaltung so um, dass Sie das Knotenpotentialverfahren anwenden können.

b) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Knotenpotentiale auf.

c) Berechnen den Strom $I(U,R,I_0)$ mit dem Knotenpotentialverfahren.

Lösung zu Aufgabe 63

a)
1. Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umwandeln
2. Knoten des Netzwerkes bezeichnen und Bezugsknoten (= Knoten 0) festlegen



b)

$$\begin{pmatrix} 3G & -G & -G \\ -G & 3G & -G \\ -G & -G & 3{,}5G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -UG + UG \\ 0 \\ UG + I_0 \end{pmatrix}$$

c)
1. Ansatz für den gesuchten Strom: $I = -U_{30} \cdot \frac{G}{2}$
2. Division durch G ergibt für die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U + I_0/G \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 9{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3U + 3I_0/G \end{pmatrix}$$

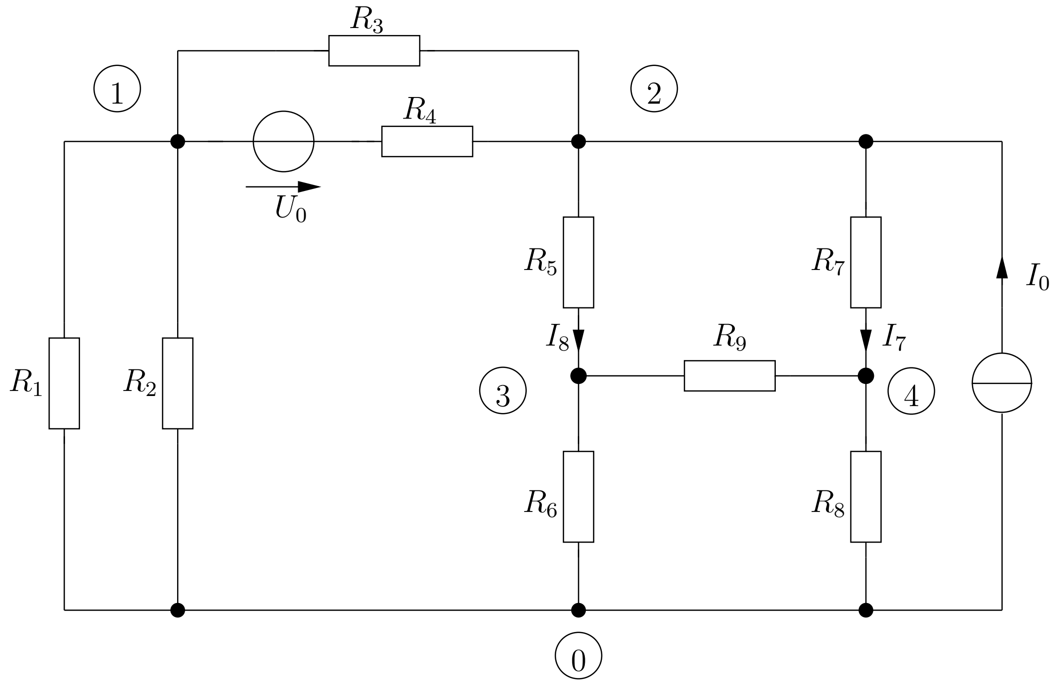
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6U + 6I_0/G \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$U_{30} = \frac{6}{15} \cdot \left(U + \frac{I_0}{G} \right) \Rightarrow I = -\frac{1}{5} \cdot (UG + I_0)$$

Aufgabe 64

Das folgende Netzwerk soll mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens analysiert werden.



a) Formen Sie das Netzwerk so um, dass das Knotenpotentialverfahren angewendet werden kann.

b) Stellen Sie das Matrix-Gleichungssystem zur Bestimmung der Knotenpotentiale auf.

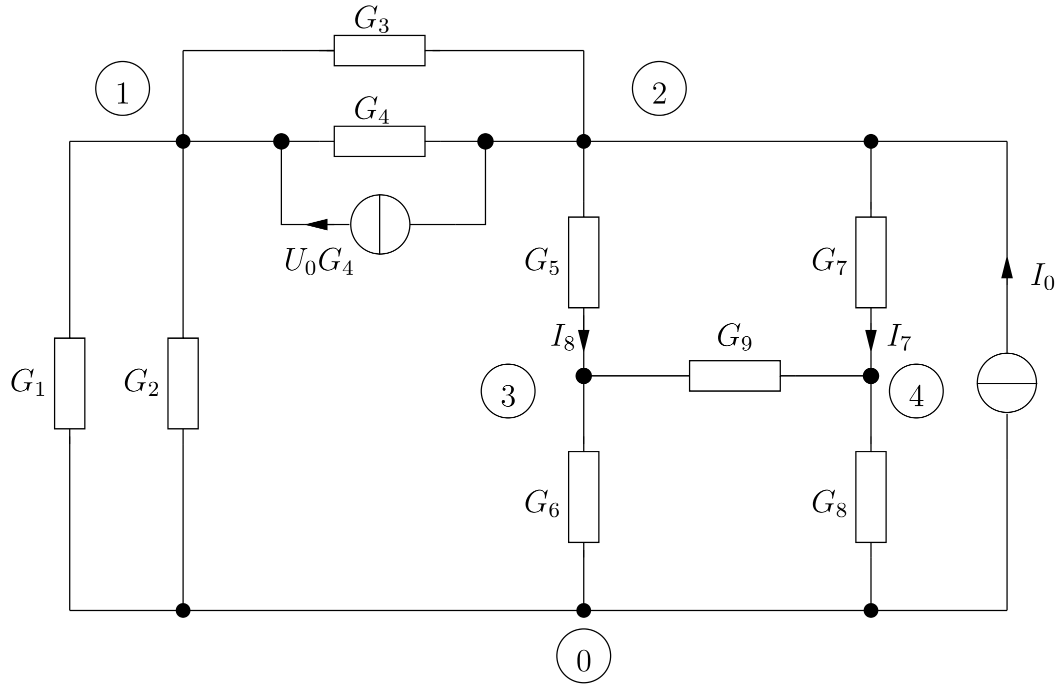
Es gilt nun: $R_1 \ldots R_8 = R, R_9 = (2/3) \cdot R$. I_0 und U_0 sind bekannt.

c) Vereinfachen Sie das Netzwerk und stellen Sie das Matrix-Gleichungssystem für das vereinfachte Netzwerk auf.

d) Berechnen Sie I_7 und I_8.

Lösung zu Aufgabe 64

a)

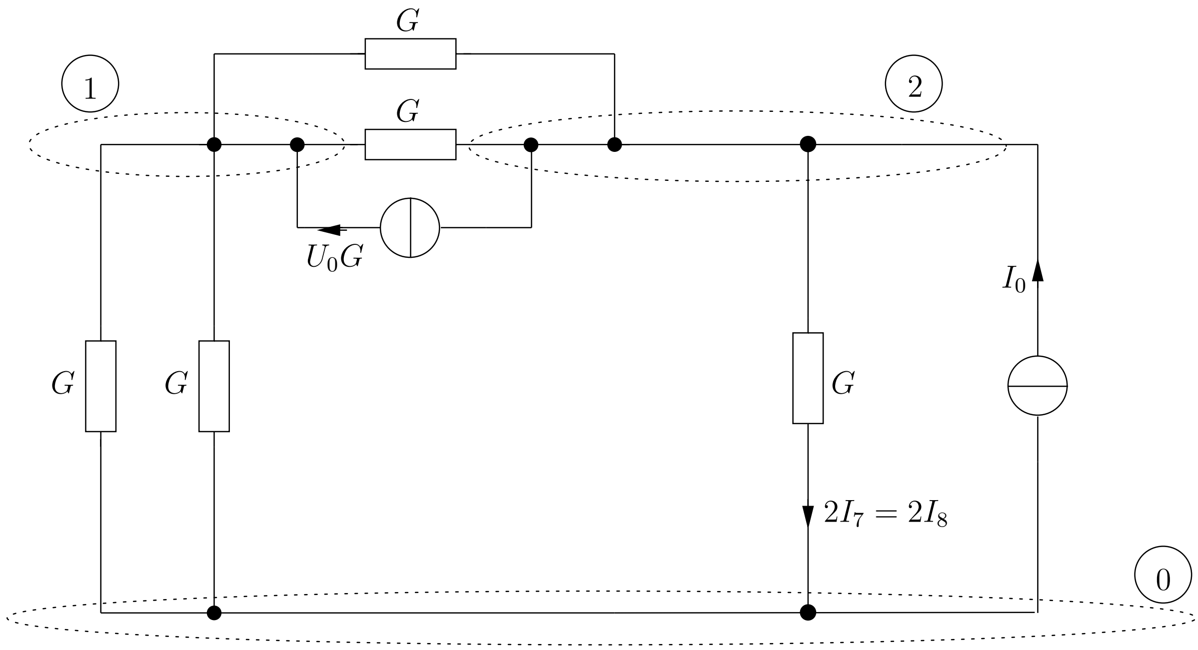


b)
Im Folgenden gilt: $1/R_\mathrm{i} = G_\mathrm{i}$.

$$\begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3+G_4 & -G_3-G_4 & 0 & 0 \\ -G_3-G_4 & G_3+G_4+G_5+G_7 & -G_5 & -G_7 \\ 0 & -G_5 & G_5+G_6+G_9 & -G_9 \\ 0 & -G_7 & -G_9 & G_7+G_8+G_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ U_{40} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_0 \cdot G_4 \\ I_0 - U_0 \cdot G_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)
Im Folgenden gilt: $1/R = G$.



Die Brücke im rechte Teil ist abgeglichen, R_9 wird nicht von einem Strom durchflossen. Vereinfachung: es existieren nur noch 2 Knoten im Netzwerk
Neu

$$\begin{pmatrix} 4G & -2G \\ -2G & 3G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \cdot G \\ I_0 - U_0 \cdot G \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 2I_0/G - 2U_0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $U_{20} = \frac{1}{3} I_0 R - \frac{1}{3} U_0$.

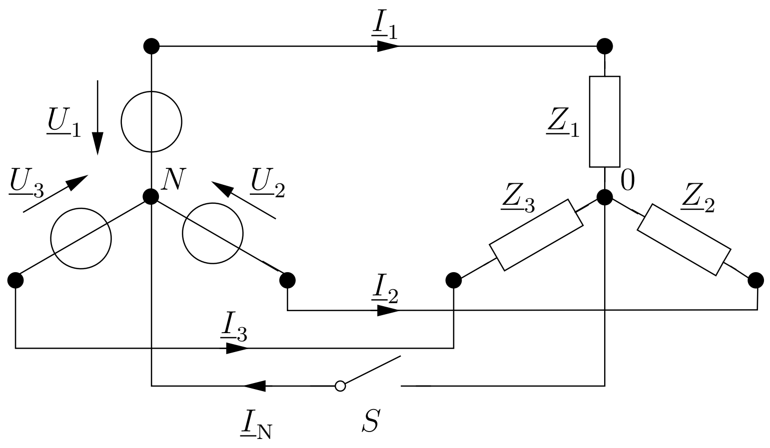
Die Ströme I_7 und I_8 erhält man aus $I_7 = I_8 = \frac{U_{20}}{2R} = \frac{I_0}{6} - \frac{U_0}{6R}$.

2.11 Drehstrom

Aufgabe 65

Gegeben ist eine Drehstromschaltung mit

$$\underline{U}_1 = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}, \quad \underline{U}_2 = U \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}, \quad \underline{U}_3 = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ} \quad \text{und} \qquad U = 230\mathrm{V}.$$



Die Werte der Impedanzen $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ sind bekannt:

$$\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\sqrt{3}R, \qquad \underline{Z}_3 = -\,\mathrm{j}\sqrt{3}R \quad \text{mit} \quad R = 10\,\Omega.$$

Der Schalter S ist geschlossen. Für den Strom im Neutralleiter gilt: $\underline{I}_\mathrm{N} = 0$.

a) Bestimmen Sie $\underline{Z}_1$.

Der Schalter S wird nun geöffnet. Die Werte der Impedanzen werden nicht verändert.

b) Bestimmen Sie die Außenleiterströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$.

c) Bestimmen Sie die Spannung zwischen den Sternpunkten N und 0.

<u>Hinweise:</u>

$$\begin{aligned} \sin(120^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(120^\circ) &= -\frac{1}{2}, \qquad \cos(-x) = \cos(x) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 65

Ansatz über Knotensatz am Sternpunkt:

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} &= 0, \\
\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\mathrm{j}\sqrt{3}R} + \frac{\underline{U}_3}{-\mathrm{j}\sqrt{3}R} &= 0, \\
\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}R}(e^{\mathrm{j}\,120^\circ} - e^{-\mathrm{j}\,120^\circ}) &= 0, \\
\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}R}(\cos(120^\circ) + \mathrm{j}\sin(120^\circ) - \cos(120^\circ) + \mathrm{j}\sin(120^\circ)) &= 0, \\
\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{3}R}\mathrm{j}\sqrt{3} &= 0, \\
\Rightarrow \underline{Z}_1 &= R
\end{aligned}$$

b) Der Öffnungszustand des Schalters ist unerheblich, da der Strom im Mittelpunktleiter ohnehin Null ist. Die Ströme sind daher über einfache Maschenumläufe zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \underline{U}_1/R = 23\,\mathrm{A}, \\
\underline{I}_2 &= \underline{U}_2/(\mathrm{j}\sqrt{3}R) = \frac{230\,\mathrm{V}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}}{\sqrt{3}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}} = \frac{230}{\sqrt{3}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,210^\circ}\ \mathrm{A} \\
\underline{I}_3 &= \underline{U}_3/(-\mathrm{j}\sqrt{3}R) = \frac{230\,\mathrm{V}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,120^\circ}}{\sqrt{3}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}} = \frac{230}{\sqrt{3}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,210^\circ}\ \mathrm{A}
\end{aligned}$$

c) $U_{N\,0} = 0$